Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 12 février 2018

Épreuve de Mathématiques 8

Correction

4

Exercice 1 (E3A PC 2017)

Partie 1

1) a)

- Pour $t = 0$, $f(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}s = 1$
- Pour $t \neq 0$, $f(t) = \left[\dfrac{e^{-ts}}{-t}\right]_0^1 = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

b) *Limite ? Équivalent. Équivalent et soustractions ? DL : avec un o, rien ne peut vous arriver.*

$$\forall t \neq 0, \qquad f(t) = \frac{1-(1-t+o(t))}{t} = 1 + o(1)$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$: f est continue en 0.
De plus, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est une application continue sur } \mathbb{R}}$$

Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$t \in \mathbb{R}^*, \qquad f'(t) = \frac{te^{-t} - (1-e^{-t})}{t^2} = (1+t-e^t)\frac{e^{-t}}{t^2}$$

Or, sur $\mathbb{R}^*$, $e^t > 1+t$, d'où le tableau de variations (attention : 2 intervalles, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$)

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	‖	$-$
f	$+\infty$ ↘ 1	‖	1 ↘ 0

Or f est continue en 1, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.
La fonction f est *continue*, *bijective*, sur l'*intervalle* $\mathbb{R}$, donc elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image.

$$\boxed{f \text{ établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

c) *On peut aussi utiliser le développable en série entière de e^x pour décomposer e^{-st} puis intervertir somme et intégrale, en invoquant les bons théorèmes d'interversion entre une série de fonctions et une intégrale. Mais il y a plus simple.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} = -\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n+1)!}$$

Si vous ne comprenez pas ces deux égalités, **écrivez les sommes avec des pointillés au brouillon**.
L'égalité reste vraie pour $t = 0$, donc

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière sur } \mathbb{R} \text{ et } f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{(n+1)!} \ \forall t \in \mathbb{R}}$$

2) **a)** S est la primitive s'annulant en 0 de f. Par primitivation terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence, S est développable en série entière de même rayon que f, et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!n}}$$

On a bien $S(0) = 0$, donc le coefficient de degré 0, a_0, est bien nul *(attention à la constante lorsque vous intégrez)*.

b) D'après 2)a) évalué en $x = 1$,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)}}$$

3) **a)** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$t^2 \frac{e^{-t}}{t} = te^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

par croissance comparée, donc $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(\dfrac{1}{t^2})$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$ converge.

Conclusion : $\boxed{R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \text{ existe}}$

b) Appliquons le théorème d'intégration par partie : Soit $u(t) = \ln t$ et $v(t) = 1 - e^{-t}$ pour $t \in]0, 1]$.
$(\ln t)(1 - e^{-t}) \sim_0 (\ln t)t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ par croissance comparée et $(\ln 1)(1 - e^{-1}) = 0$.

Donc $[uv]_0^1$ existe et vaut 0. Ainsi $S(1) = \displaystyle\int_0^1 u'(t)v(t) \, dt$ et $\displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t) \, dt$ sont de même nature, et

$$S(1) = [uv]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) \, dt = -\int_0^1 (\ln t)e^{-t} \, dt$$

Appliquons de nouveau le théorème sur $[1, +\infty[$ avec $u(t) = \ln t$ et $v(t) = e^{-t}$.
$(\ln t)e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée, et $(\ln 1)e^{-1} = 0$. Donc $[uv]_1^{+\infty}$ existe et vaut 0.

Ainsi $R(1) = \displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) \, dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v'(t) \, dt$ sont de même nature, et

$$R(1) = [uv]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t) \, dt = \int_1^{+\infty} (\ln t)e^{-t} \, dt$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}
\gamma &= S(1) - R(1) \\
&= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt \\
&= -\int_0^1 \ln(t)e^{-t} \, dt - \int_1^{+\infty} \ln(t)e^{-t} \, dt \\
\gamma &= \boxed{-\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} \, dt}
\end{aligned}$$

c) Soit G une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction G est $\mathscr{C}^1$ comme primitive d'une fonction $\mathscr{C}^0$, et $G'(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned} R(x) &= \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= G(1) - G(x) + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc R est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et $R'(x) = -G'(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$. De plus, S est une primitive de f d'après 2)a), donc $S' = f$. Ainsi,

$$\boxed{R \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } R'(x) = S'(x) - \frac{1}{x}}$$

En intégrant la relation précédente entre 1 et $x > 0$ fixé, il vient $R(x) - R(1) = S(x) - S(1) - (\ln x - \ln 1)$, puis

$$\boxed{S(x) = R(x) + \ln x + \gamma}$$

4) **a)** Soit $x \in]0, 1[$. Pour $k > 0$, posons $u_k = \dfrac{x^k}{k}$. $u_k > 0$.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{kx}{k+1} \sim x$$

Donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = x < 1$. Par conséquent, d'après le critère de D'Alembert, $\displaystyle\sum_k u_k$ converge.

Par croissance comparée, $t^2 \dfrac{x^t}{t} = te^{t\ln x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, car $\ln x < 0$. Donc $\dfrac{x^t}{t} = o(\dfrac{1}{t^2})$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann), donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$ aussi. En conclusion,

$$\boxed{g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$$

Effectuons une comparaison série / intégrale *(Toujours annoncer ce que l'on va faire)*.
Posons, pour $t \in [1, +\infty[$, $h(t) = \dfrac{x^t}{t}$. Comme $\ln x < 0$.

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad h'(t) = \frac{(\ln x)t - 1^2}{t} e^{t\ln x} < 0$$

Donc h est décroissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [k, k+1], \qquad h(k+1) \leqslant h(t) \leqslant h(k)$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, par croissance de l'intégrale, il vient,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{x^{k+1}}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^k}{k}$$

Puis en sommant entre $k = n$ et $+\infty$ (la série et l'intégrale convergent d'après ci-dessus) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

Or $g_n(x) - g(x) = \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$, d'où, en soustrayant,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \frac{x^n}{n}}$$

Comment se lancer dans la comparaison série intégrale sans avoir effectué le calcul de $g_n(x) - g(x)$? En utilisant un brouillon, comme toujours.

b) *Convergence uniforme ? Norme infinie ! Et on oublie pas de vérifier qu'il n'y a plus de x après le calcul de la norme infinie : que du n.*

D'après a), $g_n - g$ est bornée sur $]0,1[$ et

$$0 \leqslant \|g_n - g\|_\infty \leqslant \sup_{x\in]0,1[} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$$

Donc, par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$. En conclusion

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } g \text{ sur }]0,1[.}$$

c) Exprimons g à l'aide de fonctions usuelles et de R.

Partie série : D'après le cours, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$. Donc

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Partie intégrale : Effectuons le changement de variable $u = -t\ln x$. La fonction $t \mapsto -t\ln x$ est une bijection strictement croissante ($-lnx > 0$) de classe $\mathscr{C}^1$, et l'intégrale converge, donc le théorème de changement de variable nous donne la convergence de toutes les intégrale et l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{t\ln x}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = R(-\ln x)$$

Conclusion :

$$\forall x \in]0,1[, \qquad g(x) = -\ln(1-x) - R(-\ln x)$$

Limite en $x = 1$: posons $x = 1 - h$ *(comme toujours ! Le moins est là parce que $x < 1$: pour éviter des $\ln(-h)$ avec $h < 0$ qui sont troublants).* Pour tout $h \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
g(1-h) &= -\ln(1-(1-h)) - R(-\ln(1-h)) \\
&= -\ln(h) - R(h + o(h)) \\
&= -\ln(h) - S(h+o(h)) + \ln(h+o(h)) + \gamma && \text{D'après 3)c)} \\
&= -S(h+o(h)) + \ln(1+o(1)) + \gamma && \text{Car } -\ln b + \ln a = \ln(a/b)
\end{aligned}$$

Comme S est continue sur $\mathbb{R}$ (2)a)), donc en 0,

$$\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{h\to0^+} g(1-h) = -S(0) + \ln(1) + \gamma = \gamma$$

En admettant que $\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(1)$,

$$\boxed{\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)}$$

5) En effectuant le changement de variable $t = au$ (théorème du changement de variable), il vient

$$R(ax) = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-au}}{u}\,\mathrm{d}u$$

De même, $R(bx) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-bu}}{u}\,\mathrm{d}u$. Donc

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t &= R(ax) - R(bx)\\ &= S(ax) - \ln(ax) - \gamma - S(bx) + \ln(bx) + \gamma \qquad \text{D'après 3)c)}\\ &= S(ax) - S(bx) + \ln(b/a)\end{aligned}$$

Comme S est continue en 0, on peut passer à la limite : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}\Big(S(ax) - S(bx) + \ln(b/a)\Big) = \ln(b/a)$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(b/a)}$$

6) **a)** *Faire de l'analyse, c'est négliger (par exemple en majorant) ce qui ne sert pas pour garder ce qui sert.*

Comme $x > 0$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}&\forall t \geqslant x, \quad \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}\\ \Longrightarrow\ &\forall t \geqslant x, \quad \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x} \qquad \text{Or ces deux fonctions sont intégrables sur } [x,+\infty[\\ \Longrightarrow\ &R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad R(x) \leqslant \frac{e^{-x}}{x}}$$

Nous avons donc l'encadrement $0 \leqslant xR(x) \leqslant e^{-x}$, et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0}$$

b) *Évidemment, vous ne vous lancez pas dans l'intégration par partie sans l'avoir écrite au préalable au brouillon. Ce qui permet d'avoir une rédaction propre sur la copie.*

- D'après 6)a), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.
- D'après 3)c), $xR(x) = xS(x) - x\ln x + \gamma x$. Comme $S(0) = 0$, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to 0} xR(x) = 0$.
- D'après 3)c), R est une primitive de $x \mapsto -\dfrac{e^{-x}}{x}$, donc elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$, $R'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$.

Comme, de plus, $\displaystyle\int_0^{+\infty} xR'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} -e^{-x}\mathrm{d}x$ converge (et vaut -1), le théorème d'intégration par partie nous donne la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ et l'égalité

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = [xR(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xR'(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1$$

En conclusion,

$$\boxed{R \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 1.}$$

Partie 2

1) **a)** θ est dérivable terme à terme à l'intérieur de son domaine de convergence :

$$\forall x \in]-r,r[, \quad \theta'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$\theta''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Notons (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - (x+1)y = 1$. Nous avons donc les équivalences suivantes :

$$\theta \text{ solution de } (E) \iff \forall x \in]-r,r[, \quad x\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - (x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

On rentre tous les x : on développe, avec comme but $\sum b_n x^n$.

$$\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

Maintenant, on aligne toutes les puissance, par exemple ici sur x^{n-1} : minimiser les changements d'indices.

Ajuster les bornes avec les premiers termes, voir même vérifier au brouillon avec des pointillés : étape fondamentale.

$$\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 1$$

Puis on aligne les bornes de départ, quitte à enlever des termes. (idem : pointillés au brouillon).

$$\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$- \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} - a_0 - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} = 1$$

S'il n'y a pas d'erreur plus haut, on se retrouver avec une série entière $\sum b_n x^{n-1}$ (vu le choix de $n-1$) :

$$\iff \forall x \in]-r,r[, \quad a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[n(n-1)a_n + n a_n - a_{n-2} - a_{n-1}\right] x^{n-1} = 1$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1$ sur l'intervalle $]-r,r[$, on peut identifier les coefficients, en distinguant le cas du terme constant (non nul dans le membre de droite) :

$$\theta \text{ solution de } (E) \iff \begin{cases} a_1 - a_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad n(n-1)a_n + n a_n - a_{n-2} - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_1 - a_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad n^2 a_n - a_{n-2} - a_{n-1} = 0 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} a_1 - a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)^2 a_{n+2} - a_n - a_{n+1} = 0 \end{cases}}$$

b) Posons $K = 1 + |a_0|$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par définition de K.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $a_1 = 1 + a_0$ donc $|a_1| \leqslant 1 + |a_0| = \dfrac{K}{1!}$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. D'après 1)a), $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{(n+2)^2}$.

  (La relation de récurrence lie a_{n+2} à a_n et a_{n+1} : vous aurez forcément besoin de $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ pour montrer $\mathcal{H}_{n+2}$. Attention à l'initialisation.)

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}| &\leqslant \frac{|a_n| + |a_{n+1}|}{(n+2)^2} \\
&\leqslant \frac{1}{(n+2)^2}\Big(\frac{K}{n!} + \frac{K}{(n+1)!}\Big) && \text{D'après } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \\
&\leqslant \frac{K}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)+1}{n+2} && \textit{On factorise par ce qu'on veut : } K/(n+2)! \\
&\leqslant \frac{K}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant \dfrac{K}{n!}}$

Posons $b_n = \dfrac{K}{n!}$. La série entière $\sum b_n x^n$ a pour rayon $+\infty$ (et pour somme Ke^x) d'après le cours. Donc, par majoration, la série θ a un rayon $r \geqslant +\infty$. En conclusion

$$\boxed{\text{Une telle solution } \theta \text{ existe et son rayon } r = +\infty}$$

2) **a)** De $z(x) = e^{-x}y(x)$ on déduit

- $z'(x) = -e^{-x}y(x) + e^{-x}y'(x)$
- $z''(x) = e^{-x}y(x) - 2e^{-x}y'(x) + e^{-x}y''(x)$.

D'où

$$\begin{aligned}
xz''(x) + (2x+1)z'(x) &= e^{-x}(xy(x) - 2xy'(x) + xy''(x)) + (2x+1)(-y(x) + y'(x)) \\
&= e^{-x}(xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x))
\end{aligned}$$

Par suite y est dans S si et seulement si $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

b) Pour $x > 0$ l'équation s'écrit $Z'(x) + \dfrac{2x+1}{x}Z(x) = 0$. Une primitive de $\dfrac{2x+1}{x}$ est $2x + \ln(x)$. En multipliant l'équation par $e^{2x+\ln(x)} = xe^{2x}$ elle se réécrit : $(xe^{2x}Z(x))' = xe^{2x}Z'(x) + (2x+1)e^{2x}Z(x) = 0$ d'où les solutions $Z(x) = \dfrac{\lambda}{x}e^{-2x}$.

c) Le même calcul qu'au b) donne ici $(xe^{2x}Z(x))' = e^x$ qui s'intègre en $(xe^{2x}Z(x)) = e^x + \lambda$ d'où $Z(x) = \dfrac{1}{x}(e^{-x} + \lambda e^{-2x})$.
On peut aussi utiliser le 2.2)b) et appliquer la méthode de variation de la constante.

d) Il suffit d'intégrer Z pour obtenir $z(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_1^x \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t + C$. En introduisant

$$R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Et de même

$$R(2x) = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_1^x \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On obtient $z(x) = -R(x) - \lambda R(2x) + \mu$ où λ et μ sont des réels quelconques.

e) La solution générale $y \in S$ s'en déduit : $y(x) = e^x z(x) = -e^x R(x) - \lambda e^x R(2x) + \mu e^x$ où λ et μ sont des réels quelconques.

3) **a)** En reportant $R(x) = -\ln(x) - \gamma + o(1)$ et de même pour $R(2x)$ dans le 2.2)e) on obtient :
$y(x) = e^x(\ln(x) + \gamma + \lambda(\ln(2x) + \gamma) + \mu + o(1)) = e^x(\ln(x)(1 + \lambda) + \gamma + \lambda(\ln(2) + \gamma) + \mu + o(1))$.
Cette expression n'a une limite finie en 0 que pour $\lambda = -1$ puisque $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.
On a alors avec $R(x) = S(x) - \ln(x) - \gamma$:
$y(x) = e^x(R(2x) - R(x) + \mu) = e^x(S(2x) - S(x) + \mu')$ pour $x > 0$ en posant $\mu' = -\ln(2) + \mu$.

b) En posant comme au 2.2)a) $z(x) = e^{-x}y(x) = S(2x) - S(x) + \mu'$ on calcule pour $x \neq 0$:
$z'(x) = 2S'(2x) - S'(x) = 2\dfrac{1 - e^{-2x}}{2x} - \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$
$z''(x) = -\dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} + \dfrac{-e^{-x} + 2e^{-2x}}{x}$
D'où $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = -\dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} + -e^{-x} + 2e^{-2x} + 2(e^{-x} - e^{-2x}) + \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = e^{-x}$.
C'est vrai aussi pour $x = 0$ donc z vérifie l'équation (*) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par suite $y(x) = e^x(S(2x) - S(x) + \mu')$ vérifie l'équation $xy'' + y' - (x+1)y = 1$. Comme S est développable en série entière on en déduit par application du produit de Cauchy que y est développable en série entière avec un rayon de convergence infini. Au 2.1) on a trouvé que l'équation $xy'' + y' - (x + 1)y = 1$ possède une unique solution possédant un développement en série entière si on impose la condition initiale $y(0) = a_0$. On peut donc écrire $\theta(x) = e^x(S(2x) - S(x) + a_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'application du produit de Cauchy permet d'en déduire une expression de a_n.

Complément : calculons une expression de a_n. On peut se limiter au cas où $a_0 = 0$.
De $\theta(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$, $S(2x) - S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}(2^n - 1)x^n}{n(n!)}$ et $e^x = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ on déduit :
$a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}(2^k - 1)}{k(k!)} \dfrac{1}{(n-k)!}$ d'où $n!a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\dbinom{n}{k}\dfrac{(2^k - 1)}{k}$.
On peut simplifier en écrivant : $n!a_n = \sum_{k=1}^{n} \int_1^2 (-t)^{k-1}\dbinom{n}{k}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \dfrac{(1-t)^n - 1}{(1-t) - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_1^2 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \left[-\dfrac{(1-t)^k}{k}\right]_1^2 = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.
On obtient finalement $a_n = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.
On peut aussi retrouver cette expression en utilisant la relation $(n + 2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ et $a_1 = 1$. On pose $b_n = n!a_n$ qui donne $(n + 2)b_{n+2} - b_{n+1} - (n + 1)b_n = 0$ ou encore $(n+2)(b_{n+2} - b_{n+1}) = -(n+1)(b_{n+1} - b_n)$ qui avec $b_1 = 1$ et $b_0 = 0$ donne $n(b_n - b_{n-1}) = (-1)^{n-1}$ d'où $b_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 2 (Centrale PC 2016 – corrigé UPS)

Partie 1 (Une transformée de Fourier)

1) $R = +\infty$ et $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ posons $g(t) = e^{-t}t^{-3/4}e^{ixt}$.
$|g(t)| = e^{-t}t^{-3/4}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $\Gamma(1/4)$ existe.

$$\boxed{F \text{ est donc définie sur } \mathbb{R}}$$

3) En utilisant le développement en série entière de e^{itx} on obtient : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-3/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ixt)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$.

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour la série de fonction $(\sum f_n)$ définie par $f_n(t) = e^{-t}t^{-3/4}\dfrac{(ixt)^n}{n!}$ (x étant fixé) :

- f_n est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $|f_n(t)| = \dfrac{|x|^n}{n!}e^{-t}t^{n-3/4}$ et que $\Gamma(n+1/4)$ existe.
- La série $(\sum f_n)$ converge pour tout $t > 0$.
- Si on choisit $|x| < 1$, la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

  En effet, $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{n-3/4}\,\mathrm{d}t = \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1/4)$. Pour $n \geq 2$, par croissance de la fonction Γ, on obtient $u_n \leq \dfrac{|x|^n}{n!}\Gamma(n+1) = |x|^n$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente.

On obtient donc pour $|x| < 1$ en intégrant terme à terme : $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(ix)^n}{n!}$ avec $c_n = \Gamma(n+1/4)$.

Avec le résultat du I.A.2) on déduit : $c_n = c_0\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1/4)$ avec $c_0 = \Gamma(1/4)$.

La croissance de la fonction Γ pour $x \geq n > 2$ entraîne que $\Gamma(n)\dfrac{|x|^n}{n!} \leq \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leq \Gamma(n+1)\dfrac{|x|^n}{n!}$ et par suite $\dfrac{|x|^n}{n} \leq \left|c_n\dfrac{(ix)^n}{n!}\right| \leq |x|^n$. On en déduit que le rayon de convergence est égal à 1.

4) L'inégalité que l'on vient de montrer entraîne qu'il n'y a pas convergence absolue pour $|x| = 1$ puisque la série $(\sum \frac{1}{n})$ diverge.

5) Le développement en série entière de $F(x)$ donne son développement limité en 0 à l'ordre 3 :
$F(x) = c_0 + c_1 ix + c_2(\dfrac{-x^2}{2}) + c_3(\dfrac{-ix^3}{6}) + o(x^3)$.
On en déduit avec $c_1 = \dfrac{1}{4}c_0$, $c_2 = \dfrac{5}{16}c_0$ et $c_3 = \dfrac{45}{64}c_0$:
$R(x) = c_0(1 - \dfrac{5}{32}x^2) + o(x^3)$ et $I(x) = c_0(\dfrac{x}{4} - \dfrac{15}{128}x^3) + o(x^4)$ (on obtient l'ordre 4 pour $I(x)$ puisque c'est une fonction impaire).

6) On applique le théorème de dérivation sous le signe somme, aussi appelé théorème de Leibniz (à faire).
$F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/4}e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t$.

Intégrons par parties : $F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/4}e^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = \left[it^{1/4}\frac{e^{(ix-1)t}}{(ix-1)}\right]_0^{+\infty} - \frac{i}{4(ix-1)}\int_0^{+\infty} t^{-3/4}e^{(ix-1)t}\mathrm{d}t = -\frac{i}{4(ix-1)}F(x)$ puisque les limites en 0 et en $+\infty$ de l'expression entre crochets sont nulles. On a donc bien $F' + AF = 0$ en posant $A(x) = \dfrac{i}{4(ix-1)} = \dfrac{1}{4(x+i)}$.

7) On obtient $A(x) = \dfrac{x-i}{4(x^2+1)}$ dont une primitive est $G(x) = \dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) - \dfrac{i}{4}\operatorname{Arctan} x$.
On en déduit que $(Fe^G)' = (F' + FG')e^G = 0$ d'où $F(x) = Ce^{-G(x)}$ avec $C = F(0) = \Gamma(1/4)$.
On obtient donc $F(x) = \Gamma(1/4)(1+x^2)^{-1/8}e^{\frac{i}{4}\operatorname{Arctan} x}$.

8) F vérifie l'équation différentielle $4(x+i)y' + y = 0$.

Partie 2 (Autour de la loi de Poisson)

1) **a)** $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}$.

b) $\mathrm{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$.
$\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.
$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

c) Puisque X et Y sont indépendantes on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$ donc $X+Y$ a pour loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2) **a)** On montre par récurrence que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.
C'est vrai pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.
Supposons, pour un entier n, que S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$. $S_n = X_1 + ... + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes donc le 2.1.c) montre que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda + \lambda) = \mathcal{P}((n+1)\lambda)$.
Le résultat est donc vrai pour tout $n \geq 1$.

b) $\mathrm{E}(S_n) = n\lambda$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n\lambda}$ car S_n a pour loi $\mathscr{P}(n\lambda)$.
$\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}(n\lambda - n\lambda) = 0$ par linéarité de l'espérance.
Comme $V(aX+b) = a^2V(X)$, $\sigma(T_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sigma(S_n - \lambda) = 1$.

c) Puisque T_n possède une variance on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$\mathrm{P}(|T_n - \mathrm{E}(T_n)| \geq c) \leq \dfrac{\mathrm{V}(T_n)}{c^2}$ donc $\mathrm{P}(|T_n| \geq c) \leq \dfrac{1}{c^2}$. En choisissant $c \geq c(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ on obtient $\mathrm{P}(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon$.

3) **a)** $f'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ et $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Pour $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ et f' possède un minimum égal à $f'(1) = -e^{-1/2}$. Puisque f' est impaire on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f'(x)| \leq M = e^{-1/2}$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis entre x et y donne

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

Avec $k = \sup\{|f'(t)| \mid t \text{ entre } x \text{ et } y\} \leqslant M$.
Cela entraîne que f est M-lipschitzienne.

b) **i)** Pour x fixé posons $g(h) = hf(x) - \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$. $|g'(h)| = |f(x) - f(x+h)| \leq Mh$ pour $h > 0$.
On en déduit $|g(h)| = |g(h) - g(0)| = \left|\displaystyle\int_0^h g'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_0^h |g'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^h Mt\,\mathrm{d}t = M\frac{h^2}{2}$.

ii)

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=p}^{q}\left(\frac{f(x_{k,n})}{\sqrt{n\lambda}} - \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=p}^{q} M\frac{1}{2\lambda n} = \frac{M(q+1-p)}{2\lambda n}$$

en appliquant le i) pour $x = x_{k,n}$ et $h = \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ (car $x_{k+1,n} = x_{k,n} + h$).

iii) D'une part on a $p - 1 < n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leq p$ donc $a \leq x_{p,n} < a + \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{p,n} = a$.
De même, $q \leq n\lambda + b\sqrt{n\lambda} < q+1$ donc $b - \dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} < x_{q,n} \leq b$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{q,n} = b$.
On en déduit puisque f est continue : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
D'autre part $0 \leq q - p \leq (b-a)\sqrt{n\lambda}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M(q+1-p)}{2\lambda n} = 0$.
On en déduit avec le ii) :
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \lim_{n\to+\infty}\int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) **i)** Par définition, $x_{k,n}\sqrt{n\lambda} = k - n\lambda$ donc $y_{k,n} = \left(\dfrac{n\lambda}{k}\right)^k e^{k-n\lambda}$.

On en déduit $\dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} = \dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}k^k}{e^k k!} = \dfrac{\sqrt{2\pi k}k^k}{e^k k!}\sqrt{\dfrac{n\lambda}{k}}$.

Puisque $k \in I_n$, on a $1 + \dfrac{a}{\sqrt{n\lambda}} \leq \dfrac{k}{n\lambda} \leq 1 + \dfrac{b}{\sqrt{n\lambda}}$ donc $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$. Cela entraîne que k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part l'équivalent de Stirling entraîne que $\dfrac{\sqrt{2\pi k}k^k}{e^k k!}$ tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$. Par suite, $\dfrac{\sqrt{2\pi n\lambda}}{y_{k,n}} e^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ pour $n \geq N_1(\varepsilon)$ ce qui démontre le résultat demandé.

ii) Pour $k \in I_n$ on a $a \leq x_{k,n} \leq b$ donc $x_{k,n}$ est borné. De plus on a montré que $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda} = x_{k,n}\dfrac{n\lambda}{k}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On peut donc utiliser le développement limité $\ln(1+t) = t - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ avec $t = \dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\ln(y_{k,n}) - \ln f(x_{k,n}) &= k\ln(1 - \frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}) + x_{k,n}\sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2}x_{k,n}^2 \\
&= k\left(-\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda} - \frac{1}{2}(\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda})^2 + o((\frac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda})^2)\right) + x_{k,n}\sqrt{n\lambda} + \frac{1}{2}x_{k,n}^2 \\
&= \frac{1}{2}x_{k,n}^2\left(1 - \frac{n\lambda}{k} + o(\frac{n\lambda}{k})\right).
\end{aligned}$$

Cette expression a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque $x_{k,n}$ est borné et $\dfrac{k}{n\lambda}$ a pour limite 1.

On en déduit que $\dfrac{y_{k,n}}{f(x_{k,n})}$ a pour limite 1 et on obtient l'inégalité demandée pour $n \geq N_2(\varepsilon)$.

d) On déduit de la question précédente que :
$\dfrac{(1-\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\displaystyle\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) \leq \sum_{k\in I_n}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} \leq \dfrac{(1+\varepsilon)^2}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}}\sum_{k\in I_n} f(x_{k,n})$.

Avec le 2.3.b)iii) on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\in I_n}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \mathrm{P}(n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant S_n \leqslant n\lambda + b\sqrt{n\lambda}) = \displaystyle\sum_{k\in I_n}\mathrm{P}(S_n = k)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

f) Puisque S_n a pour loi $\mathcal{P}(n\lambda)$, $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \displaystyle\sum_{k\in I_n}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour $c > a$ on a $\mathrm{P}(T_n \geq a) = \mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant c) + \mathrm{P}(T_n > c)$. Soit $\varepsilon > 0$. Avec la question 2.2.c) on peut choisir c_1 tel que pour $c > c_1$ on ait $\mathrm{P}(T_n > c) \leq \mathrm{P}(|T_n| \geq c) \leq \varepsilon$. D'autre part, puisque $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\dfrac{1}{x^2})$, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc on peut choisir c_2 tel que pour $c > c_2$ on ait $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon$.

Pour $c > \max(c_1, c_2)$ on a $\left|\mathrm{P}(T_n \geq a) - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2\varepsilon + \left|\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant c) - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x\right| \leq 3\varepsilon$ pour $n \geq n_0$. Par suite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n \geq a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathrm{P}(T_n = a) \leq \mathrm{P}(a \leq T_n \leq a+\varepsilon)$ qui tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$. Comme cette intégrale peut être arbitrairement proche de 0, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n = a) = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n > a) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n \geq a) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n \leq b) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n > b) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4) a) Avec le 2.2.c) on a pour $b \leq -c(\varepsilon)$: $\mathrm{P}(T_n \leq b) \leq \mathrm{P}(T_n \geq |b|) \leq \varepsilon$. On en déduit avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(T_n \leq b) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

b) $\mathrm{e}^{-n\lambda}A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda\rfloor} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(S_n \leq n\lambda)$ puisque S_n ne prend que des valeurs entières.

On a donc $\mathrm{e}^{-n\lambda}A_n = \mathrm{P}(T_n \leq 0)$ qui tend vers $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}$ par parité de la fonction f.

On a donc $A_n \sim \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{n\lambda}$.

$\mathrm{e}^{-n\lambda}(A_n + B_n) = 1 + \mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!}$ avec $k = \lfloor n\lambda\rfloor$. Comme $k \leq n\lambda < k+1$ on a :

$\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} \leq \mathrm{e}^{-k}\dfrac{(k+1)^k}{k!} \sim (1+\dfrac{1}{k})^k\dfrac{1}{\sqrt{2\pi k}}$ qui tend vers 0 puisque k tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et $(1+\dfrac{1}{k})^k$ a pour limite e. Par suite $B_n \sim \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{n\lambda}$.

c) $\mathrm{e}^{-n\lambda}C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(S_n \leq n) = \mathrm{P}(T_n \leq \dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe b tel que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1-\varepsilon$. Puisque $1-\lambda > 0$, on a $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \geq b$ pour $n \geq n_1$. On a alors $\mathrm{e}^{-n\lambda}C_n \geq \mathrm{P}(T_n \leq b)$ qui tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1-\varepsilon$. On en déduit, puisque que $\mathrm{e}^{-n\lambda}C_n \leq 1$ (c'est une probabilité), que $\mathrm{e}^{-n\lambda}C_n$ a pour limite 1 si $\lambda < 1$.

$\mathrm{e}^{-n\lambda}D_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = k) = \mathrm{P}(S_n > n) = \mathrm{P}(T_n > \dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n})$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a < 0$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1-\varepsilon$. Puisque $1-\lambda < 0$, on a $\dfrac{1-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\sqrt{n} \leq a$ pour $n \geq n_2$. On a alors $\mathrm{e}^{-n\lambda}D_n \geq \mathrm{P}(T_n > a)$ qui tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1-\varepsilon$. On en déduit, puisque que $\mathrm{e}^{-n\lambda}D_n \leq 1$ (c'est une probabilité), que $\mathrm{e}^{-n\lambda}D_n$ a pour limite 1 si $\lambda > 1$.

5) a) $(n\lambda)^{-n}\displaystyle\int_0^{n\lambda}(n\lambda - t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\lambda}\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Définissons $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n\lambda}\right)^n\mathrm{e}^t$ si $t < n\lambda$ et $f_n(t) = 0$ si $t \geq n\lambda$ et utilisons le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (la limite à gauche en $t = n\lambda$ de $f_n(t)$ est égale à 0).

Pour $n > t$ on a $f_n(t) = e^{t+n\ln(1-\frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t) = e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$, puisque $n\ln(1-\dfrac{t}{n\lambda}) \sim -\dfrac{t}{\lambda}$. La suite (f_n) converge donc simplement vers la fonction f qui est continue sur $\mathbb{R}^+$.

La majoration connue $\ln(1+x) \leq x$ entraîne pour $t < n\lambda$ que $f_n(t) \leq e^{t(1-\frac{1}{\lambda})} = f(t)$. C'est aussi vérifié pour $t \geq n\lambda$ puisque $f_n(t) = 0$. La fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque $1 - \dfrac{1}{\lambda} < 0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\left((n\lambda)^{-n}\int_0^{n\lambda}(n\lambda-t)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}}{(1-\frac{1}{\lambda})}\right]_0^{+\infty}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

b) Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction exp sur l'intervalle $[0,n\lambda]$:

$e^{n\lambda}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}+\int_0^{n\lambda}\frac{(n\lambda-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t$. On en déduit avec le résultat du 2.5.a) :

$D_n=e^{n\lambda}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\lambda)^k}{k!}=\int_0^{n\lambda}\frac{(n\lambda-t)^n}{n!}e^t\,\mathrm{d}t\sim\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{(n\lambda)^n}{n!}$ quand $\lambda<1$.

6) Intégrons par parties : $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(r-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\right]_{-\infty}^0+\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^t t$. C'est légitime : les intégrales existent car $((r-t)^n\mathrm{e}^t=o(\frac{1}{t^2})$ en $-\infty$ et l'expression entre crochets a une limite en 0 et en $-\infty$. On obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{r^n}{n!}+\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. On continue à intégrer par parties et on montre par récurrence sur k que :

$\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{r^n}{n!}+...+\frac{r^{n-k+1}}{(n-k+1)!}+\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

On obtient finalement pour $k=n$: $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{(r-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{r^n}{n!}+...+\frac{r^1}{1!}+\int_{-\infty}^0\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ qui est égal à C_n si on choisit $r=n\lambda$.

On a donc $C_n=\displaystyle\frac{(n\lambda)^n}{n!}\int_{-\infty}^0\left(1-\frac{t}{n\lambda}\right)^n\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$

Appliquons à nouveau le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $g_n(t)=\left(1-\dfrac{t}{n\lambda}\right)^n\mathrm{e}^t$:

Chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^-$.

Puisque $t\le 0$ on peut écrire $g_n(t)=e^{t+n\ln(1-\frac{t}{n\lambda})}$ qui a pour limite $f(t)=e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}$ quand n tend vers $+\infty$ (comme à la question 2.5.a) avec f qui est continue sur $\mathbb{R}^-$.

La majoration connue $\ln(1+x)\le x$ entraîne que $g_n(t)\le e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}=f(t)$. La fonction f est intégrable sur $]-\infty,0]$ puisque $1-\dfrac{1}{\lambda}>0$.

Le théorème de convergence dominée s'applique et donc :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^0 g_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{t(1-\frac{1}{\lambda})}}{(1-\frac{1}{\lambda})}\right]_{-\infty}^0=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

On en déduit que $C_n\sim\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\dfrac{(n\lambda)^n}{n!}$ quand $\lambda>1$.

Exercice 3 (CCP PC 2016)

1) $\boxed{A_n=}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac{1}{n}\\0&0&1-\frac{1}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{n}&0&0\\0&1-\frac{1}{n}&0\\0&0&1-\frac{1}{n}\end{pmatrix}+\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)I_3+\frac{1}{n}H}.$

2) a) $H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, son polynôme caractéristique est donc $X(X-1)^2$.

0 est une valeur propre simple, son espace propre est donc de dimension 1, et 1 est une valeur propre double, et le rang de $H-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ est 1, donc, par théorème du rang la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $3-\mathrm{rg}\,(H-I)=2$, $\boxed{\text{la matrice } H \text{ est donc diagonalisable}}$.

Vous pouvez aussi faire les calculs classiques. Vous devez savoir faire cette question.

b) La matrice Q est triangulaire et n'a aucun 0 sur sa diagonale, donc $\det Q \neq 0$: $\boxed{Q \text{ est inversible}}$

c) On sait que, si on note $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $HE_1 = E_1$ et $HE_2 = E_2$, or, pour diagonaliser H, on prend une base de vecteurs propres pour $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et Q la matrice de passage de la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ à la base de vecteurs propres.

Il reste donc à trouver un troisième vecteur $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ tel que $HX = 0 \iff \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$ avec $c = 1$ (d'après ce qui est demandé), on trouve que $X = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ est l'unique solution. On prend donc $E_3 = X$.

Ainsi, si on pose $Q = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, alors, Q est inversible et $Q^{-1}HQ = D \iff \boxed{H = QDQ^{-1}}$.

On peut chercher a et b à partir de $HQ = QD$.

3) **a)** $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n) = I_3}$, en effet, pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $\lim_{n\to+\infty}(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

b) ψ est linéaire, en effet,
Soit $(M, M') \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\psi(\lambda M + M') = Q(\lambda M + M')Q^{-1} = \lambda QMQ^{-1} + QM'Q^{-1} = \lambda\psi(M) + \psi(M')$.

c) ψ est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et ces deux espaces vectoriels sont de dimension finie, donc, ψ est continue.

Ainsi, si $\lim_{\ell\to+\infty}(M_\ell) = M$, alors, $\boxed{\lim_{\ell\to+\infty}(QM_\ell Q^{-1}) = \lim_{\ell\to+\infty}\psi(M_\ell) = \psi(M) = QMQ^{-1}}$.

d) Nous avons $Q^{-1}A_nQ = Q^{-1}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H\right]Q = \left(1 - \frac{1}{n}\right)Q^{-1}I_3Q^{-1} + \frac{1}{n}QHQ^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{Q^{-1}A_nQ = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}D = A_n}$.

e) Pour $n \geqslant 2$, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $A_n^\ell = QD_n^\ell Q^{-1}$.

Or, $\lim_{\ell\to+\infty}(D_n^\ell) = D$, car, $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \lim_{\ell\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell = 1$, donc, $\lim_{\ell\to+\infty}(D_n^\ell)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ pour $n \geqslant 2$.

Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $\boxed{\lim_{\ell\to+\infty}(A_n^\ell) = QDQ^{-1} = H}$ d'après la question précédente.

f) Pour $n \geqslant 2$, $A_n^n = QD_n^nQ^{-1}$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(D_n^n)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \neq 3 \\ e^{-1} & \text{si } i = j = 3 \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ pour $n \geqslant 2$, car

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1}$$

En conclusion, $\lim_{n\to+\infty}(A_n^n) = Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}Q^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ d'après la question **9.c)**.

D'où, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(A_n^n) =}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1-e^{-1}\\0&0&e^{-1}\end{pmatrix}}$.

FIN DE L'ÉPREUVE