Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Vous avez deux types d'exercices : les exercices 1 et 3 qui sont plus du type E3A/CCP, et l'exercice 2 inspiré d'un sujet de Centrale – quasi complet. Selon vos projets et vos priorités, concentrez vous sur l'un ou l'autre des exercices, ou panachez. Dans tous les cas, ne vous inquiétez pas de la longueur du sujet.

Exercice 1 (E3A PC 2017)

Partie 1

1) **a)** Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-ts}\,\mathrm{d}s$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$

3) **a)** Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$. Justifier l'égalité : $\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

c) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que

$$S(x) = R(x) + \ln x + \gamma$$

4) **a)** Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$, et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n}$.

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0, 1[$.

c) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

6) **a)** Montrer que, pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Au moyen d'une intégration par partie, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Partie 2

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $xy'' + y' - (x+1)y = 1$.

1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$ où $r > 0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite (a_n), montrer qu'il existe $K > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r = +\infty$.

2) On souhaite résoudre ici cette équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$S = \{y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R}) \ \mid \ \forall x > 0,\ xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x) = 1\}$$

a) Pour tout $y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, on pose $z(x) = e^{-x}y(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que $y \in S$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x > 0, \qquad xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x} \tag{1}$$

b) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \qquad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = 0$$

c) Déterminer les $Z \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x > 0, \qquad xZ'(x) + (2x+1)Z(x) = e^{-x}$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation (1), en utilisant la fonction R définie pour $x > 0$ par $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$: on utilisera $R(x)$ et $R(2x)$.

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in S$.

3) **a)** Sachant que $R(x) = -\ln(x) + \gamma + o(1)$ quand $x \to 0$, avec $x > 0$, déterminer les solutions $y \in S$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie 1 reliée à R par $S(x) = R(x) + \ln x + \gamma$ pour tout $x > 0$.

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question 1 de la partie 2 : on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites (a_n) de cette même question 1 ?

Exercice 2 (D'après Centrale)

On utilise la fonction Gamma d'Euler pour calculer, en partie 1, une intégrale dépendant d'un paramètre. En partie 2, en liaison avec des variables aléatoires suivant une loi de Poisson, on détermine l'équivalent, quand $n \to +\infty$, de sommes dépendant d'un paramètre entier n. Les deux parties sont largement indépendantes.

On pose,

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On admet que Γ est bien définie, croissante, et que de plus

$$\Gamma(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]0,+\infty[\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Partie 1 (Une transformée de Fourier)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{-3/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1) Rappeler le développement en série entière de l'exponentielle, et son rayon.

2) Montrer que la fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & F(x) \end{array}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer qu'au voisinage de $x = 0$, la fonction F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \tag{S}$$

où c_n est la valeur de Gamma en un point à préciser. On exprimera c_n en fonction de n et de c_0. Quel est le rayon de convergence de la série entière qui apparaît au second membre de (S) ?

4) On admet que $\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}}\right)^x$.
Étudier si la série du second membre de (S) converge absolument lorsque $|x| = R$.

5) Soit $R(x)$ la partie réelle et $I(x)$ la partie imaginaire de $F(x)$.
Déterminer, au voisinage de 0, le développement limité de $R(x)$ à l'ordre 3 et de $I(x)$ à l'ordre 4.

6) À l'aide d'une intégration par parties, prouver que F vérifie sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle de la forme $F' + AF = 0$, où A est une fonction à préciser.

7) En déduire une expression de $F(x)$.
On pourra commencer par dériver la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{8}\ln(1+x^2) + \dfrac{\mathrm{i}}{4}\operatorname{Arctan} x$.

8) Retrouver le développement en série entière de F à l'aide de l'équation différentielle. On exprimera les coefficients sous forme de suite récurrente.

Partie 2 (Autour de la loi de Poisson)

Dans cette partie, λ désigne un réel strictement positif.
On rappelle qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre λ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(X \in A)$ désigne la probabilité de l'événement $X^{-1}(A)$.
On note $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(X = k)t^k$ (série génératrice de la variable aléatoire X).

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- **a)** Déterminer $G_X(t)$.
- **b)** Calculer l'espérance $\mathrm{E}(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type de X.
- **c)** Soit μ un réel strictement positif. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ et telle que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de $X + Y$.

2) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On rappelle que, quels que soient les entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ et les intervalles I_1, I_2,… I_k de $\mathbb{R}$

$$\mathrm{P}(X_{i_1} \in I_1, X_{i_2} \in I_2, \ldots, X_{i_k} \in I_k) = \prod_{j=1}^{j=k} \mathrm{P}(X_{i_j} \in I_j)$$

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, déterminer la loi de $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

b) Déterminer l'espérance et l'écart-type des variables aléatoires S_n et $T_n = \dfrac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $c(\varepsilon)$ tel que, si $c \geqslant c(\varepsilon)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathrm{P}(|T_n| \geqslant c) \leqslant \varepsilon$.

3) Dans cette sous-partie, on fixe deux réels a et b tels que $a < b$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $a + \sqrt{n\lambda} > 0$, on pose

$$I_n = \{k \in \mathbb{N} | n\lambda + a\sqrt{n\lambda} \leqslant k \leqslant n\lambda + \sqrt{n\lambda}\}$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_{k,n} = \dfrac{k - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.

On considère enfin la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que f soit une fonction M-lispschitzienne.

b) **i)** Montrer que, si x, $h \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, alors $|hf(x) - \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant M\frac{h^2}{2}$.

ii) En déduire, lorsque I_n est non vide, une majoration de

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) - \int_{x_{p,n}}^{x_{q+1,n}} f(t)\,\mathrm{d}t \right|$$

où p est le plus petit élément de I_n et q est le plus grand.

iii) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \sum_{k\in I_n} f(x_{k,n}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Pour tout $k \in I_n$, on note $y_{k,n} = \left(1 - \dfrac{x_{k,n}}{k}\sqrt{n\lambda}\right)^k \exp(x_{k,n}\sqrt{n\lambda})$.
Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'un entier $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$ et tout $k \in I_n$, les inégalités suivantes soient satisfaites :

i) $\dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n} \leqslant \mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(n\lambda)^k}{k!} \leqslant \dfrac{1+\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n\lambda}} y_{k,n}$

ii) $(1-\varepsilon)f(x_{k,n}) \leqslant y_{k,n} \leqslant (1+\varepsilon)f(x_{k,n})$

Pour le second encadrement, on pourra étudier la limite de $\ln\Big(y_{k,n}/f(x_{k,n})\Big)$.

d) Exprimer, sous forme d'intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in I_n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$ (Enoncé corrigé : Il manquait le n dans l'exponentielle dans l'original.)

e) Comparer $\mathrm{P}(a \leqslant T_n \leqslant b)$ et $\displaystyle\sum_{k\in I_n} \mathrm{P}(S_n = k)$, où S_n et T_n sont définies dans la question 2 de la partie 2.

f) Déterminer les limites, quand $n \to +\infty$, de

$$\mathrm{P}(T_n \geqslant a), \quad \mathrm{P}(T_n = a), \quad \mathrm{P}(T_n > a) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(T_n \leqslant b)$$

4) **a)** Déduire de la question 2.3.f) la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de

$$A_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n\lambda \rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{\lfloor n\lambda \rfloor}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.
On interprétera $\mathrm{e}^{-n\lambda} A_n$ comme la probabilité d'un événement lié à S_n et donc à T_n.

c) Pour $\lambda \neq 1$, on note $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ et $D_n = C_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda} C_n$ si $\lambda < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\lambda} D_n$ si $\lambda > 1$.

5) On suppose $\lambda < 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((n\lambda)^{-n} \displaystyle\int_0^{n\lambda} (n\lambda - t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \right)$.

b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, en déduire un équivalent de D_n quand $n \to +\infty$.

6) Si $\lambda > 1$, déterminer un équivalent de C_n lorsque $n \to +\infty$.
Considérer l'intégrale $\dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} (r - t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et choisir convenablement le réel r.

Exercice 3

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$

1) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$. Montrer que $A_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) I_3 + \dfrac{1}{n} H$.

2) **a)** La matrice H est-elle diagonalisable ?

b) Soit a et b deux réels et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que Q est inversible.

c) Déterminer (sans chercher à calculer Q^{-1}) deux réels a et b tels que $H = QDQ^{-1}$.

3) On suppose dans toute la fin de cette partie que les réels a et b ont été choisis de telle sorte que $H = QDQ^{-1}$ pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque. Si une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, notée (M_ℓ), converge vers une matrice M, on note $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (M_\ell) = M$. On admet alors que $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (M_\ell) = M$ si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on a : $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (M_\ell)_{i,j} = M_{i,j}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n) = I_3$

b) Montrer que l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\psi(M) = QMQ^{-1}$ est linéaire.

c) En déduire que si $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (M_\ell) = M$, alors, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}$.

d) Montrer que $A_n = QD_nQ^{-1}$.

e) Déterminer explicitement, pour $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{\ell\to+\infty} (A_n^\ell)$.

f) Déterminer explicitement $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n^n)$.

FIN DE L'ÉPREUVE