

Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (CCINP TSI 2021)

Partie 1 (Marche aléatoire sur un carré)

1) a)
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

b) Par définition, $f_\theta(x, y) = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; soit
$$f_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}$$

c) Par définition, l'affixe de $f_\theta(x, y)$ est : $(x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta)$; or

$$(x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta) = x(\cos \theta + i \sin \theta) + iy(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta}(x + iy)$$

- 2) a) Tout d'abord, une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss permet d'affirmer que l'équation complexe $z^n - 1 = 0$ admet n racines (en tenant compte des multiplicités).

Ensuite, soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$; $(\omega_k)^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n \underset{\text{Moivre}}{=} e^{i2k\pi} = 1$; donc ω_k est racine de l'équation

$z^n - 1 = 0$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Les racines n -ième de l'unité sont bien $\{\omega_k, \text{ pour } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$

b) $r_{2\pi/n}(\omega_k) = e^{i\frac{2\pi}{n}} \omega_k = e^{i\frac{2\pi}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{(2k+2)\pi}{n}}$ on a bien :

$$r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$$

c) Pour $n = 4$; $\omega_0 = e^{i\frac{2 \times 0 \times \pi}{4}} = 1$; $\omega_1 = e^{i\frac{2 \times 1 \times \pi}{4}} = i$; $\omega_2 = e^{i\frac{2 \times 2 \times \pi}{4}} = -1$; $\omega_3 = e^{i\frac{2 \times 3 \times \pi}{4}} = -i$

- 3) a) L'affixe A_{n+1} est obtenue à partir de l'affixe A_n , soit par une rotation dans le sens trigonométrique d'angle $\frac{\pi}{2}$, dans ce cas $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}} A_n$; soit par une rotation dans le sens horaire d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et dans ce cas

$A_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} A_n$; or la variable aléatoire D_n vaut 1 si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et vaut -1 si elle s'effectue dans le sens inverse, donc
$$A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2} D_n} A_n$$

- b) Les événements $\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\}$ forment un système complet d'événement, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1} = 1) = P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = 1)) + P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = i)) + P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -1)) + P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -i))$$

L'événement $(A_{n+1} = 1)$ n'est réalisable que si $(A_n = i)$ ou $(A_n = -i)$, donc $P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = 1)) = 0$ et $P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -1)) = 0$; il reste :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) &= P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = i)) + P((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -i)) \\ &= P(A_n = i)P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1) + P(A_n = -i)P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

or l'aiguille se déplace dans le sens trigonométrique ou le sens inverse avec une probabilité de $\frac{1}{2}$

donc : $P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$ et $P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$; on a bien :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i)$$

c) De même, on a :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = i) &= \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \\ P(A_{n+1} = -1) &= \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i) \\ P(A_{n+1} = -i) &= \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \end{aligned}$$

d) La matrice M est symétrique réelle donc M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

e) La matrice M possède deux colonnes identiques, donc par définition son déterminant est nul et donc M n'est pas inversible

f) $M(1, -1, 1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1, -1, 1, -1) = -1 \cdot (1, -1, 1, -1)$;

on en déduit que

$$-1 \text{ est valeur propre de } M \text{ associée au vecteur propre } (1, -1, 1, -1)$$

g) $M(1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1, 1, 1, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1, 1)$; on en déduit que

$$\text{le vecteur } (1, 1, 1, 1) \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1$$

h) On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; $\text{Im}(M) = \text{Vect}(Me_1, Me_2, Me_3, Me_4)$; soit

$$\text{Im}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right); \text{ une base de } \text{Im}(M) \text{ est}$$

donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\text{Ker}(M)) + \dim(\text{Im}(M))$;

on vient de montrer que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, on en déduit donc que $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$.

$\text{Ker}(M)$ est un sous-espace propre de M de dimension 2; de plus 1 et -1 sont des valeurs propres de M donc les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont de dimension au moins égale à 1. On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 4, la dimension de $\mathbb{R}^4$ et on retrouve ainsi le fait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

i) Si $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1} = 1) \\ P(A_{n+1} = i) \\ P(A_{n+1} = -1) \\ P(A_{n+1} = -i) \end{pmatrix}$.

Les résultats des questions **Q38** et **Q39** permettent d'écrire : $U_{n+1} = MU_n$; on démontrerait par récurrence que $U_n = M^n U_0$. Un calcul de M^n en utilisant la relation $M^n = PD^nP^{-1}$, avec P la matrice constituée des vecteurs propres et $D = \text{diag}(0, 0, 1, -1)$, nous donnerait le vecteur U_n .

Partie 2

- 1) a) Si X suit une loi de Rademacher, alors $X(\Omega) = \{-1, 1\}$; en particulier X admet un nombre fini de valeurs (2 valeurs exactement) donc $\boxed{X \in V_f(\Omega)}$

Par définition, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x) = (-1) \times P(X=-1) + 1 \times P(X=1) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$;

soit $\boxed{E(X) = 0}$

- b) • La variable nulle suit une loi certaine et admet une seule valeur, 0, donc la variable nulle appartient à $V_f(\Omega)$.
- Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors la variable $\lambda X_1 + X_2$ prend un nombre fini de valeurs et ainsi $\lambda X_1 + X_2 \in V_f(\Omega)$

On a montré que $\boxed{V_f(\Omega) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$

- c) • *Symétrie* : $\Phi(Y, X) = E(YX) = E(XY) = \Phi(X, Y)$; donc Φ est symétrique.
- *Bilinéarité* : Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$;
 $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = E((\lambda X_1 + X_2)Y) = E(\lambda X_1 Y + X_2 Y) = \lambda E(X_1 Y) + E(X_2 Y)$ par linéarité de l'espérance; donc $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = \lambda \Phi(X_1, Y) + \Phi(X_2, Y)$; ainsi Φ est linéaire à gauche, et par symétrie, on en déduit que Φ est bilinéaire.
- *Positivité* : $\Phi(X, X) = E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x)$; avec $P(X=x) \in [0, 1]$ et $x^2 \geq 0$;
on en déduit $\Phi(X, X) \geq 0$ et Φ est positive.
- *Définie-Positivité* : $\Phi(X, X) = 0$ si et seulement si $\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) = 0$; or une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement si chaque terme est nul; donc $\forall x \in X(\Omega)$, $x^2 P(X=x) = 0$; alors, soit $P(X=x) = 0$ et alors l'événement $(X=x)$ est impossible; soit $x = 0$. Finalement la seule valeur possible pour X est 0 et ainsi X est la variable nulle.

Φ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive; donc $\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } V_f(\Omega)}$

- 2) a) • Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; $\|X_i\|^2 = \Phi(X_i, X_i) = E(X_i^2) = \sum_{x \in X_i(\Omega)} x^2 P(X_i=x)$; or X_i suit une loi de Rademacher, donc $\|X_i\|^2 = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + (1)^2 \times \frac{1}{2}$; on a bien $\|X_i\| = 1$.
- Soit $i \neq j$, $\Phi(X_i, X_j) = E(X_i X_j) = \sum_{x_i \in X_i(\Omega)} \sum_{x_j \in X_j(\Omega)} x_i x_j P((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j))$; X_i et X_j suivent des lois de Rademacher, donc :
- $$\Phi(X_i, X_j) = (-1) \times (-1) P((X_i = -1) \cap (X_j = -1)) + (-1) \times (1) P((X_i = -1) \cap (X_j = 1)) \\ + (1) \times (-1) P((X_i = 1) \cap (X_j = -1)) + (1) \times (1) P((X_i = 1) \cap (X_j = 1));$$
- de plus X_i et X_j sont indépendantes, donc :
- $$\Phi(X_i, X_j) = (-1) \times (-1) P(X_i = -1) \times P(X_j = -1) + (-1) \times (1) P(X_i = -1) \times P(X_j = 1) \\ + (1) \times (-1) P(X_i = 1) \times P(X_j = -1) + (1) \times (1) P(X_i = 1) \times P(X_j = 1);$$
- $$\Phi(X_i, X_j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Les $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, donc :

$\boxed{(X_1, \dots, X_n) \text{ est une famille orthogonale de } V_f(\Omega) \text{ pour le produit scalaire } \Phi}$

- b) $F = \text{Vect}(X_1, \dots, X_n)$; la famille génératrice de F est une famille orthonormale, donc est également une famille libre; ainsi cette famille est une base de F et donc $\boxed{\dim(F) = n}$
- c) Soit $X \in V_f(\Omega)$, indépendante des $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; $\Phi(X, X_i) = E(X X_i) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{x_i \in \{-1, 1\}} x x_i P((X=x) \cap (X_i=x_i))$; soit

$$\begin{aligned}\Phi(X, X_i) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \times (-1)P((X = x) \cap (X_i = -1)) + \sum_{x \in X(\Omega)} x \times (1)P((X = x) \cap (X_i = 1)); \text{ et} \\ \text{par indépendance :} \\ &= - \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \times P(X_i = -1) + \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \times P(X_i = 1) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = -\frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X)\end{aligned}$$

ce qui donne : $\Phi(X, X_i) = 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; ce qui signifie que $\boxed{X \in F^\perp}$

- d) Tout d'abord, $X_i \in \{-1, 1\}$; donc $X_i + 1 \in \{0, 2\}$ et $\frac{X_i + 1}{2} \in \{0, 1\}$;
de plus $P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 0\right) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ et $P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 1\right) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$;
donc la variable $\frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Ainsi X est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli, d'après le cours :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}}$$

Par définition, $d(X, F) = \|X - p_F(X)\|$, où $p_F(X)$ est le projeté orthogonal de X sur F défini par :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^n \Phi(X, X_i) X_i$$

$$\text{or } \Phi(X, X_i) = E\left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{X_j + 1}{2}\right) X_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n E(X_j X_i + X_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n E(X_j X_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \underbrace{E(X_i)}_{=0}$$

si $i \neq j$, $E(X_j X_i) = 0$ et si $i = j$, $E(X_i^2) = 1$; donc $\Phi(X, X_i) = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{p_F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i}$$

Première méthode plus longue, mais utilisant des résultats intéressants :

D'après le théorème de Pythagore : $\|X\|^2 = \|p_F(X)\|^2 + \|X - p_F(X)\|^2$; soit $\|X - p_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_F(X)\|^2$

$\|X\|^2 = \Phi(X, X) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$, où V est la variance de X . (On rappelle la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$) On a démontré que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, donc $E(X) = np = \frac{n}{2}$ et $V(X) = np(1 - p) = \frac{n}{4}$ et ainsi

$$\|X\|^2 = \frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2 + n}{4}.$$

Dans la base **orthonormale** $\{X_1, \dots, X_n\}$ de F , la variable $p_F(X)$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right)$;

$$\text{donc } \|p_F(X)\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}.$$

$$\text{Finalement : } \|X - p_F(X)\|^2 = \frac{n^2 + n}{4} - \frac{n}{4} = \frac{n^2}{4} \text{ et donc : } \boxed{d(X, F) = \frac{n}{2}}$$

Deuxième méthode plus courte :

On sait que $X = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2}$ et $p_F(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i$; donc $X - p_F(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ et $Y = X - p_F(X)$ est une variable qui suit une loi certaine de valeur $\frac{n}{2}$.

$\|Y\|^2 = \Phi(Y, Y) = E(Y^2) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \times P\left(Y = \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4} \times 1$ et ainsi $\|Y\| = \frac{n}{2}$. On retrouve :

$$\boxed{d(X, F) = \frac{n}{2}}$$

Exercice 2 (D'après Banque PT 2023)

1) La fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$.

Étudions le signe de $g(x) = \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ en fonction de x .

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x+1)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $g(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$:

$$\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

2) La fonction g est une fraction rationnelle, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et le logarithme de même, donc par composition

$$F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F$$

3) Soit $x \in \mathcal{D}_F$: Décomposez. Ne pas vouloir tout faire d'un coup.

Avec $u = x(x+1)$ et $v = (2x+1)^2$,

$$\begin{aligned}
 u' &= x+1+x = 2x+1 \\
 v' &= 2 \times 2 \times (2x+1) = 4(2x+1) \\
 g'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
 &= \frac{(2x+1)^3 - x(x+1) \times 4(2x+1)}{(2x+1)^4} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{(2x+1)^3} \\
 &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4(x^2 + x)}{(2x+1)^3} \\
 &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x}{(2x+1)^3} \\
 &= \frac{1}{(2x+1)^3} \\
 F'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\
 &= \frac{1}{(2x+1)^3} \times \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \\
 &= \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

- 4) a) Soit $x \neq 0$. Posons $u_n = f(n)x^{2n+1}$ pour $n \geq 1$. Comme $f(n) \neq 0$, $u_n \neq 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(n+1)(2n+1)|x|^{2n+3}}{(n+1)(n+2)(2n+3)|x|^{2n+1}} \\ \sim \frac{2n^3}{2n^3}|x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|^2$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $x^2 < 1$ (c'est-à-dire $|x| < 1$), $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
- Si $x^2 > 1$ (c'est-à-dire $|x| > 1$), $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi,

$$\boxed{R = 1}$$

- b) « Rappeler » : il n'y a aucune justification à donner.

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad R = 1}$$

- c) i) La série géométrique a pour rayon 1, et s'écrit

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Avec $u = x^2$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ est développable en série entière de rayon 1 et

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \quad \text{et le rayon est } 1}$$

- ii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}}$$

Si on trouve une décomposition qui convient, c'est suffisant : on ne vous demande qu'une décomposition, pas de trouver toutes les décompositions, ou d'utiliser telle ou telle méthode spécifiquement.

- d) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ la fonction somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.

Posons $G(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Comme $G(x) = \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x))$, il vient

$$G'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) = g(x)$$

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières, la primitive G de g est développable en série entière de même rayon 1, et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad G(x) = K + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Comme $G(0) = \ln(1) = 0$, $K = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et le rayon est } 1 = R}$$

e) Soit $x \in]-1, 1[$. D'après 4b,

$$\forall u \in]-1, 1[, \quad \ln(1 - u) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

Donc en posant $u = x^2$, il vient,

$$-x \ln(1 - x^2) = -x \left(- \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n}$$

f) Suivons l'indication : soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+1/2} &= \frac{2(x+1)(x+1/2) + 2x(x+1/2) - 4x(x+1)}{x(x+1)(x+1/2)} \\ &= \frac{(x+1)(2x+1) + x(2x+1) - 4(x^2+x)}{x(x+1)(x+1/2)} \\ &= \frac{(2x+1)^2 - 4x^2 - 4x}{x(x+1)(x+1/2)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)(x+1/2)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \frac{1}{2} \frac{1}{n(n+1)(n+1/2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

Remplaçons : Soit $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{Car le rayon de ces séries est 1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} - 4 \left(-x + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \\ &= -x \ln(1 - x^2) - x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} + 4x - 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{D'après d et e} \end{aligned}$$

Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1 - x^2)$, donc, pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} = -x \ln(1 - x^2) - \frac{\ln(1 - x^2)}{x} - 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + 3x$$

En factorisant $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ puis en utilisant les propriétés des logarithmes, on trouvera $P(x) \ln(1+x) + Q(x) \ln(1-x)$ avec P et Q des fractions rationnelles simples. Ce n'est pas utile ici. Par contre, c'est utile à la question suivante.

g) Imposons $x < 1$, on étudiera $x = 1$ à la question suivante. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} &= - \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln(1 - x^2) - 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + 3x \\ &= 3x - \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(\ln(1-x) + \ln(1+x) \right) - 2 \ln(1+x) + 2 \ln(1-x) \\ &= 3x - \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \ln(1-x) - \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) \ln(1+x) \end{aligned}$$

Une fois ce calcul effectué, la seule forme indéterminée est $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \ln(1 - x)$, traitons le reste.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \left[3x - \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) \ln(1 + x) \right] = 3 - 4 \ln 2.$$

Posons $g(x) = \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \ln(1 - x)$, et $x = 1 - h$

Toujours la même technique pour une limite qui n'est pas en 0 : s'y ramener¹.

$$\begin{aligned} g(1 - h) &= \left(1 - h - 2 + \frac{1}{1 - h} \right) \ln(1 - (1 - h)) \\ &= (-h - 1 + 1 + h + o(h)) \ln(h) \\ &= o(h \ln(h)) \end{aligned} \quad \text{limite délicate ? DL}$$

Par croissance comparée, $\lim_{h \rightarrow 0} g(1 - h) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right) = 3 - 4 \ln 2$$

h) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1, 1]$,

$$u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

- Convergence normale de $\sum u_n$:

$$\|u_n\|_\infty = f(n) \sup_{x \in [-1, 1]} |x|^{2n+1} = f(n)$$

Ainsi, $\|u_n\|_\infty \sim \frac{1}{2n^3}$. Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $\alpha = 3 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

- Théorème d'interversion de limite :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1, 1]$;
- $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$;

Donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $[-1, 1]$.

En particulier, en $x = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

Or, en cas d'existence, limite $x \rightarrow 1$ et limite $x \rightarrow 1, x < 1$ sont égales :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right)$$

Donc, d'après la question précédente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln(2)$$

1. $x = 1 - h$ plutôt que $x = 1 + h$ pour avoir $\ln h$ avec $h > 0$ plutôt que $\ln(-h)$ avec $h < 0$: pur choix esthétique.

Exercice 3 (E3A PSI 2023)

1) On veut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Or $([X = i])_{i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements, donc

$$\forall j \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y = j]) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$$

Puis, comme $(Y = j)_{j \in Y(\Omega)}$ est aussi un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([Y = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \quad \text{On connaît des sommes de } \binom{n}{k}, \text{ pas de } \binom{n}{k-1} \\ &= \alpha \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \\ &= \alpha(1+1)^n(1+1)^n = \alpha 4^n \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha = \frac{1}{4^n}$$

2) Loi de X : $X(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Y = j)_{j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \quad \text{Changement d'indice} \\ &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \end{aligned}$$

Donc, la loi de X est

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

X est une loi binomiale, avec un décalage d'indice ($i-1$ au lieu de i) : $X-1 \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$.

Loi de Y : $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Par symétrie des rôles joués par X et Y , en échangeant X et Y , et i et j , il vient

$$\forall j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1}$$

3) Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = i])\mathbb{P}([Y = j]) &= \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \times \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1} \\ &= \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])\end{aligned}$$

Donc

Les deux variables X et Y sont indépendantes

4) La variable aléatoire Z suit une loi binominale : $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Z = i) = \mathbb{P}(X = i+1) = \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}$$

Donc

$$Z \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$$

De plus, $\mathbb{E}(Z) = np = n/2$: par linéarité de l'espérance, $X = Z+1$ entraîne $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z)+1 = n/2+1$. Pour la variance, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z+1) = \mathbb{V}(Z)$ (*c'est du cours, mais on le retrouver vite via $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$: un décalage sur X ne change rien*).

Or $\mathbb{V}(Z) = np(1-p) = n/4$, d'où

$$\mathbb{E}(X) = n/2 + 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = n/4$$

5) Par indépendance de X et Y ,

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]) = \mathbb{P}(Y = i)$$

Donc, d'après 2,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad b_{ij} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

6) D'après la question 5, $b_{ij} = c_i$, avec $c_i = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$. Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & \dots & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+1} & \dots & c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\text{rg}(B) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}\right) \in \{0, 1\}$. Or $c_1 = \frac{1}{2^n} \neq 0$, donc $\text{rg}(B) \neq 0$:

$$\text{rg}(B) = 1$$

Rappel : Si $A = \left(C_1 \mid \dots \mid C_n \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\text{rg}(A) = \dim \text{Im } A = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$: le rang est dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A , car $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.

De plus, $\text{Im } B$ est engendré par les vecteurs colonnes, donc, avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$,

$$\text{Im } B = \text{Vect}(C)$$

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } B = n + 1 - \text{rg}(B) = n$.

Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $c_i = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{Ker } B &\iff BX = 0 \\
 &\iff \begin{cases} c_1 x_1 + \dots + c_1 x_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ c_{n+1} x_1 + \dots + c_{n+1} x_{n+1} = 0 \end{cases} \\
 &\iff x_1 + \dots + x_{n+1} = 0 \\
 &\iff x_1 = -x_2 - \dots - x_{n+1}
 \end{aligned}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{aligned}
 &\iff X = \begin{pmatrix} -x_2 - \dots - x_{n+1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} -x_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \\
 &\iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Ker } B = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

7) a) Écrivons le produit CL :

$$CL = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} (\ell_1 \dots \ell_{n+1}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_j & \dots & \ell_{n+1} \\ c_1 \ell_1 & \dots & c_1 \ell_j & \dots & c_1 \ell_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_i \ell_1 & \dots & c_i \ell_j & \dots & c_i \ell_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n+1} \ell_1 & \dots & c_{n+1} \ell_j & \dots & c_{n+1} \ell_{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\text{Si } H = (h_{ij}) = CL, \text{ alors } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, h_{ij} = c_i \ell_j$$

b) D'après les questions 6 et 7a,

$$B = CL \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}, \quad c_i = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}$$

$$\text{c) } \text{Tr } B = \sum_{i=1}^{n+1} c_i = LC$$

8) D'après 7b, $B^2 = CLCL = C(\text{Tr } B)L = (\text{Tr } B)CL = \text{Tr}(B)B$.

9) D'après 8, $B^2 - \text{Tr}(B)B = 0$: un polynôme annulateur de B est $P(X) = X^2 - \text{Tr}(B)X$.

Or $\text{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$, donc $P(X) = X^2 - X = X(X - 1)$.

Le polynôme annulateur P de B est scindé à racines simples, donc, d'après le théorème de diagonalisation,

B est diagonalisable

De plus, $\text{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$. Il y a 4 ensembles possibles pour $\text{Sp}(B)$: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$.

- Comme B est diagonalisable, B a au moins une valeur propre : $\text{Sp}(B) \neq \emptyset$.
- Supposons que B n'a qu'une valeur propre λ (0 ou 1 ici). Comme B est diagonalisable, il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P(\lambda I_{n+1})P^{-1} = \lambda P I_{n+1} P^{-1} = \lambda I_{n+1}$$

Or $n \geq 1$, donc $b_{1,n+1}$ n'est pas un terme diagonal, et $b_{1,n+1} = \frac{1}{2^n} \neq 0$: $B \neq \lambda I_{n+1}$.

Ainsi, $\text{Sp}(B) \neq \{0\}$ et $\text{Sp}(B) \neq \{1\}$.

Conclusion :

$\text{Sp}(B) = \{0, 1\}$

FIN DE L'ÉPREUVE