

Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour X une variable aléatoire sur Ω , on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs. On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad P(X = -1) = \frac{1}{2} \quad P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Partie 1 (Marche aléatoire sur un carré)

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Rotations du plan.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Donner la matrice dans la base canonique de la rotation f_θ d'angle θ de $E = \mathbb{R}^2$.

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy$ dans $\mathbb{C}$.

c) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}z \quad \text{où } z \in \mathbb{C}$$

2) Racines n -ième de l'unité.

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

- a) Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega_k \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.
- b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, déterminer $r_{2\pi/n}(\omega_k)$.
- c) Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique $x + iy$ de $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ω_3 .
- 3) Marche aléatoire sur un carré.
- Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n . Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, i, -1, -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n} A_n$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i)$$

- c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, de même, la loi de A_{n+1} en fonction de la loi de A_n .

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

- d) Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- e) La matrice M est-elle inversible ?
- f) Montrer que ${}^t(1 \ 1 \ 1 \ 1)$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.
- g) Montrer que -1 est valeur propre de M .
- h) Déterminer le rang de M et en déduire l'ensemble des valeurs propres, ainsi que la dimension des sous-espace vectoriel associés.
- i) Posons $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et d'une matrice que l'on précisera.
- j) Déterminer la loi de A_n en fonction de n .

Partie 2 (Orthonormalité des lois de Rademacher)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

- 1) Un produit scalaire.

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid X(\Omega) \text{ est fini}\}$$

- a) Montrer que, si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et déterminer $E(X)$, où E désigne l'espérance.
- b) Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- c) On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par

$$\forall (X, Y) \in V_f(\Omega)^2 \quad \Phi(X, Y) = E(XY)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

2) Orthonormalité et projection.

On considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

- a) Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour Φ .
On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$.
- b) Déterminer la dimension de F .
- c) Montrer que, si $X \in V_f(\Omega)$ est indépendante de chacune des variables $X_1, \dots, X_n$, alors $X \in F^\perp$.
- d) Soit $X = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(X_k + 1)$. Déterminer la loi de X , puis la distance de X à F pour la norme associée à Φ .

Exercice 2

On considère la fonction F qui, à tout réel x de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$, associe :

$$F(x) = \ln \left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right)$$

- 1) Déterminer $\mathcal{D}_F$. Ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.
- 2) Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.
- 3) Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$: $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$.
- 4) On s'intéresse, dans ce qui suit, à la série entière $\sum_{n \geq 1} f(n)x^{2n+1}$.
 - a) Déterminer son rayon de convergence R .
 - b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$, ainsi que son rayon de convergence.
 - c) i) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, en précisant le rayon de convergence.
ii) Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$.
 - d) Dédurre de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, en précisant le rayon de convergence, que l'on comparera à la valeur R obtenue en 4a.
 - e) Montrer que, pour tout réel x de $] -R, R[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2)$$

f) Pour tout réel x de $] -R, R[$, exprimer, à l'aide de fonctions usuelles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

Indication : on pourra calculer $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+1/2}$.

g) Déterminer :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right)$$

h) En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln(2)$$

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \quad p_{ij} = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

- 1) Déterminer la valeur du réel α .
- 2) Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y .
- 3) Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 4) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
- 5) On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est :

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y = i]).$$

Montrer que $b_{ij} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$.

- 6) Déterminer $\text{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$.
- 7) a) Si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ et $L = (\ell_1 \cdots \ell_{n+1})$, exprimer les coefficients de la matrice CL à l'aide des coefficients de C et de L .
b) Déterminer une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.
c) En déduire une expression de $\text{Tr}(B)$ à l'aide de L et C .
- 8) Démontrer que $B^2 = \text{Tr}(B)B$.
- 9) Déterminer les valeurs propres de B . B est-elle diagonalisable ?

FIN DE L'ÉPREUVE