Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (D'après Banque PT 2023) **1)** La fonction logarithme est définie sur $]0,+\infty[$.

Étudions le signe de $g(x) = \dfrac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ en fonction de x.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Donc $g(x) > 0$ pour $x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$:

$$\boxed{\mathcal{D}_F =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[}$$

2) La fonction g est une fraction rationnelle, donc $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et le logarithme de meme, donc par composition

$$\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_F}$$

3) Soit $x \in \mathcal{D}_F$: *Décomposez. Ne pas vouloir tout faire d'un coup.*
Avec $u = x(x+1)$ et $v = (2x+1)^2$,

$$\begin{aligned}
u' &= x+1+x = 2x+1 \\
v' &= 2 \times 2 \times (2x+1) = 4(2x+1) \\
g'(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
&= \frac{(2x+1)^3 - x(x+1)\times 4(2x+1)}{(2x+1)^4} \\
&= \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{(2x+1)^3} \\
&= \frac{4x^2+4x+1-4(x^2+x)}{(2x+1)^3} \\
&= \frac{4x^2+4x+1-4x^2-4x}{(2x+1)^3} \\
&= \frac{1}{(2x+1)^3} \\
F'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= \frac{1}{(2x+1)^3} \times \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \\
&= \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}}$$

4) **a)** Soit $x \neq 0$. Posons $u_n = f(n)x^{2n+1}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $f(n) \neq 0$, $u_n \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{n(n+1)(2n+1)|x|^{2n+3}}{(n+1)(n+2)(2n+3)|x|^{2n+1}} \\ &\sim \frac{2n^3}{2n^3}|x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^2\end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert,

- Si $x^2 < 1$ (c'est-à-dire $|x| < 1$), $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
- Si $x^2 > 1$ (c'est-à-dire $|x| > 1$), $\sum |u_n|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_n$ diverge.

Ainsi,

$$\boxed{R = 1}$$

b) *« Rappeler » : il n'y a aucune justification à donner.*

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad R = 1}$$

c) **i)** La série géométrique a pour rayon 1, et s'écrit

$$\forall u \in]-1, 1[, \qquad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Avec $u = x^2$, on en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est développable en série entière de rayon 1 et

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \quad \text{et le rayon est 1}}$$

ii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}}$$

Si on trouve une décomposition qui convient, c'est suffisant : on ne vous demande qu'une décomposition, pas de trouver toutes les décompositions, ou d'utiliser telle ou telle méthode spécifiquement.

d) Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ la fonction somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.

Posons $G(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Comme $G(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$, il vient

$$G'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) = g(x)$$

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières, la primitive G de g est développable en série entière de même rayon 1, et

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad G(x) = K + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Comme $G(0) = \ln(1) = 0$, $K = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et le rayon est } 1 = R}$$

e) Soit $x \in]-1,1[$. D'après 4b,

$$\forall u \in]-1,1[, \qquad \ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$$

Donc en posant $u = x^2$, il vient,

$$\boxed{-x\ln\left(1-x^2\right) = -x\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n}}$$

f) Suivons l'indication : soit $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+1/2} &= \frac{2(x+1)(x+1/2) + 2x(x+1/2) - 4x(x+1)}{x(x+1)(x+1/2)}\\ &= \frac{(x+1)(2x+1) + x(2x+1) - 4(x^2+x)}{x(x+1)(x+1/2)}\\ &= \frac{(2x+1)^2 - 4x^2 - 4x}{x(x+1)(x+1/2)}\\ &= \frac{1}{x(x+1)(x+1/2)}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)(n+1/2)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

Remplaçons : Soit $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right)x^{2n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} && \text{Car le rayon de ces séries est 1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{n} - 4\left(-x + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\\ &= -x\ln(1-x^2) - x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{n} + 4x - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) && \text{D'après d et e}\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2)$, donc, pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{2n+1} = -x\ln(1-x^2) - \frac{\ln(1-x^2)}{x} - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x}$$

En factorisant $1-x^2 = (1-x)(1+x)$ puis en utilisant les propriété des logarithme, on trouvera $P(x)\ln(1+x) + Q(x)\ln(1-x)$ avec P et Q des fractions rationnelles simple. Ce n'est pas utile ici. Par contre, c'est utile à la question suivante.

g) Imposons $x < 1$, on étudiera $x = 1$ à la question suivante. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} &= -\left(x + \frac{1}{x}\right)\ln(1-x^2) - 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x \\ &= 3x - \left(x + \frac{1}{x}\right)\Big(\ln(1-x) + \ln(1+x)\Big) - 2\ln(1+x) + 2\ln(1-x) \\ &= 3x - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) - \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\end{aligned}$$

Une fois ce calcul effectué, la seule forme indéterminée est $\lim\limits_{x\to 1}\left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\ln(1-x)$*, traitons le reste.*

Or $\lim\limits_{x\to 1}\left[3x - \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)\right] = 3 - 4\ln 2$.

Posons $g(x) = \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)\ln(1-x)$, et $x = 1 - h$

Toujours la même technique pour une limite qui n'est pas en 0 : s'y ramener[1].

$$\begin{aligned}g(1-h) &= \left(1 - h - 2 + \frac{1}{1-h}\right)\ln(1-(1-h)) \\ &= (-h - 1 + 1 + h + o(h))\ln(h) && \textit{limite délicate ? DL} \\ &= o(h\ln(h))\end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\lim\limits_{h\to 0} g(1-h) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}\right) = 3 - 4\ln 2}$$

h) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$,

$$u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

- Convergence normale de $\sum u_n$:

$$\|u_n\|_\infty = f(n) \sup_{x\in[-1,1]} |x|^{2n+1} = f(n)$$

  Ainsi, $\|u_n\|_\infty \sim \frac{1}{2n^3}$. Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $\alpha = 3 > 1$).
  Donc, par théorème de comparaison, $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
  Ainsi, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
- Théorème d'interversion de limite :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1,1]$;
  - $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$;

  Donc, par le théorème de continuité des séries de fonctions, $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $[-1,1]$.

En particulier, en $x = 1$,

$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

1. $x = 1 - h$ plutôt que $x = 1 + h$ pour avoir $\ln h$ avec $h > 0$ plutot que $\ln(-h)$ avec $h < 0$: pur choix esthétique.

Or, en cas d'existence, limite $x \to 1$ et limite $x \to 1, x < 1$ sont égales :

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \right)$$

Donc, d'après la question précédente,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\ln(2)}$$

Exercice 2 (E3A PSI 2023)

1) On veut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Calculons la double somme suivante, finie :

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{P}(\Omega) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} && \textit{On connaît des sommes de } \binom{n}{k}\textit{, pas de } \binom{n}{k-1} \\
&= \alpha \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \\
&= \alpha(1+1)^n(1+1)^n = \alpha 4^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{4^n}}$$

2) <u>Loi de X</u> : $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$.
La formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(Y = j)_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\
&= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} && \text{Changement d'indice} \\
&= \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}
\end{aligned}$$

Donc, la loi de X est

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n+1]\!] \quad \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}}$$

X est une loi binomiale, avec un décalage d'indice ($i-1$ au lieu de i) : $X - 1 \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$.

<u>Loi de Y</u> : $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.
Par symétrie des rôles joués par X et Y, en échangeant X et Y, et i et j, il vient

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n+1]\!] \quad \mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1}}$$

3) Soient $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=i])\mathbb{P}([Y=j]) &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1} \\ &= \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{Les deux variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$$

4) La variable aléatoire Z suit une loi binominale : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(Z=i) = \mathbb{P}(X=i+1) = \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}$$

Donc

$$\boxed{Z \sim \mathscr{B}(n, \frac{1}{2}), \quad \mathbb{E}(Z) = np = \frac{n}{2}, \quad \mathbb{V}(Z) = np(1-p) = \frac{n}{4}}$$

5) Par indépendance de X et Y,

$$b_{ij} = \mathbb{P}_{[X=j]}([Y=i]) = \mathbb{P}(Y=i)$$

Donc, d'après 2,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!], \qquad b_{ij} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}}$$

6) D'après la question 5, $b_{ij} = c_i$, avec $c_i = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i-1}$. Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & \dots & c_2 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+1} & \dots & c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}) \in \{0, 1\}$. Or $c_1 = \dfrac{1}{2^n} \neq 0$, donc $\mathrm{rg}\,(B) \neq 0$:

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(B) = 1}$$

Rappel : Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_n \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\,(A) = \dim \mathrm{Im}\, A = \dim \mathrm{Vect}\,\big(C_1, \dots, C_n\big)$ *: le rang est dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de* A, *car* $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_n)$.

De plus, $\mathrm{Im}\ B$ est engendré par les vecteurs colonnes, donc, avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\mathrm{Im}\ B = \mathrm{Vect}\,(C)}$$

D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ B = n + 1 - \mathrm{rg}\,(B) = n$.

Comme, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $c_i = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{i-1} \neq 0$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \text{Ker } B \iff BX = 0$$

$$\iff \begin{cases} c_1 x_1 + \cdots + c_1 x_{n+1} = 0 \\ \vdots \\ c_{n+1} x_1 + \cdots + c_{n+1} x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0$$

$$\iff x_1 = -x_2 - \cdots - x_{n+1}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -x_2 - \cdots - x_{n+1} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} -x_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } B = \text{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

7) **a)** Écrivons le produit CL :

$$CL = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} (\ell_1 \cdots \ell_{n+1}) = \begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} \ell_1 & \ldots & \ell_j & \ldots & \ell_{n+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_1\ell_1 & \ldots & c_1\ell_j & \ldots & c_1\ell_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_i\ell_1 & \ldots & c_i\ell_j & \ldots & c_i\ell_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n+1}\ell_1 & \ldots & c_{n+1}\ell_j & \ldots & c_{n+1}\ell_{n+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc

$$\boxed{\text{Si } H = (h_{ij}) = CL, \text{ alors } \forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!],\ h_{ij} = c_i \ell_j}$$

b) D'après les questions 6 et 7a,

$$\boxed{B = CL \quad \text{avec} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix}, \quad c_i = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}}$$

c) $\boxed{\text{Tr } B = \sum_{i=1}^{n+1} c_i = LC}$

8) D'après 7b, $B^2 = CLCL = C(\text{Tr } B)L = (\text{Tr } B)CL = \text{Tr}\,(B)B$.

9) D'après 8, $B^2 - \text{Tr}\,(B)B = 0$: un polynôme annulateur de B est $P(X) = X^2 - \text{Tr}\,(B)X$.

Or $\text{Tr}\,(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y = i) = 1$, donc $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$.

Le polynôme annulateur P de B est scindé à racines simples, donc, d'après le théorème de diagonalisation,

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$$

De plus, $\text{Sp}\,(B) \subset \{0, 1\}$. Il y a 4 ensembles possibles pour $\text{Sp}\,(B)$: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$.

- Comme B est diagonalisable, B a au moins une valeur propre : $\text{Sp}\,(B) \neq \emptyset$.
- Supposons que B n'a qu'une valeur propre λ (0 ou 1 ici). Comme B est diagonalisable, il existe $P \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$B = P(\lambda I_{n+1})P^{-1} = \lambda P I_{n+1} P^{-1} = \lambda I_{n+1}$$

  Or $n \geqslant 1$, donc $b_{1,n+1}$ n'est pas un terme diagonal, et $b_{1,n+1} = \dfrac{1}{2^n} \neq 0$: $B \neq \lambda I_{n+1}$.

  Ainsi, $\text{Sp}\,(B) \neq \{0\}$ et $\text{Sp}\,(B) \neq \{1\}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Sp}\,(B) = \{0, 1\}}$$

Exercice 3 (CCINP PSI 2023)

Partie I - Un développement en série entière

1) La rayon de convergence est $R = 1$, et

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} x^n}$$

2) Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) \\
&= (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+2k}{2} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) && \text{Puis on fait apparaître les termes pairs} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha = -1/2$, et en évaluant en $-x$, la formule de la question 1 s'écrit, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-1/2-k)}{n!}(-x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{(-1)^n}{n!}x^n && \text{D'après le calcul précédent} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

Dans toute cette partie, il ne faut pas hésiter – comme toujours – à nommer les objets. Ici, nommer les variables aléatoires $\dfrac{X_t+1}{2}$ *et* $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$.

3) Soit $t \in \mathbb{N}^*$ et $Y_t = \dfrac{X_t+1}{2}$. $X_t(\Omega) = \{-1,1\}$, donc $Y_t(\Omega) = \{0,1\}$. Ainsi, Y_t suit une loi de Bernoulli.
Toujours déterminer $X(\Omega)$. Toujours. Puis étudier les évènements avant de calculer des probabilités. Toujours.

$$(Y_t = 1) = \left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = (X_t = 1)$$

Donc

$$\mathbb{P}(Y_t = 1) = \mathbb{P}(X_t = 1) = p$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{X_t+1}{2} \sim \mathscr{B}(p)}$$

Posons $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, par le lemme des coalitions, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont aussi mutuellement indépendantes.
Ainsi, Z_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Donc $Z_n \sim \mathscr{B}(n,p)$:

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la variable aléatoire } \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,p)}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimons l'événement $(S_n = 0)$ à l'aide de Z_n :

$$\begin{aligned}
Z_n &= \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Big(\sum_{t=1}^{n} X_t\Big) + n\right) \\
&= \frac{1}{2}(S_n + n)
\end{aligned}$$

Donc $S_n = 2Z_n - n$, et *(Toujours étudier les évènements avant de calculer des probabilités)*

$$(S_n = 0) = (Z_n = n/2)$$

Or $Z_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, donc, si n est impair, $n/2 \notin \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Z_n = n/2) = 0$.

Sinon, comme $\mathbb{P}(Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

5) Calculons un équivalent :

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \binom{2n}{n} (p(1-p))^n \\ &= \frac{(2n)!}{n!^2} (p(1-p))^n \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} (p(1-p))^n && \text{D'après Stirling} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} (p(1-p))^n \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n && \textit{Il faut donc étudier la position de } 4p(1-p) \textit{ par rapport à } 1. \end{aligned}$$

Posons, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) = 4x(1-x) = 4(x - x^2)$.

$$\forall x \in [0,1], \qquad g'(x) = 4(1-2x)$$

D'où le tableau de variations

x	0		$1/2$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Donc, pour tout $p \in]0,1[$, $4p(1-p) \in]0,1]$, et donc $0 \leqslant (4p(1-p))^n \leqslant 1$, puis

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = 0}$$

Ce qui signifie que la probabilité de retour à l'origine $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ tends vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

6) T_n compte le nombre de passage à l'origine à l'instant $2n$, c'est-à-dire après $2n$ déplacements.

7) $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$ donc O_{2j} suit une loi de Bernoulli. De plus *(Toujours étudier les évènements avant etc.)*

$$(O_{2j} = 1) = (S_{2j} = 0)$$

Ainsi, si $j \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(O_{2j} = 1) = u_{2j} = \binom{2j}{j} (p(1-p))^j$$

Et pour $j = 0$, $\mathbb{P}(O_0 = 1) = 1 = \binom{0}{0} (p(1-p))^0$. Ainsi

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}, \quad O_{2j} \sim \mathscr{B}\left(\binom{2j}{j} (p(1-p))^j\right)}$$

De plus, $\mathbb{E}(O_j) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$ (Loi de Bernoulli). Comme $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$, par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j}$$

8) Si $p \neq \frac{1}{2}$, d'après l'étude de fonction effectuée à la question 5, $4(p(1-p)) \in]0,1[$.
Donc on peut évaluer l'égalité de la question 2 en $x = 4p(1-p)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}(4p(1-p))^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}(p(1-p))^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)\end{aligned}$$

Au brouillon, il est plus naturel de partir de $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$ et d'essayer de faire apparaitre la formule du 2. On constate alors que $x = 4p(1-p)$. Et on se pose les questions suivantes : est-ce qu'on peut appliquer la formule du 2 en $x = 4p(1-p)$? Est-ce qu'on aurait, par hasard, montré la convergence de la suite $\mathbb{E}(T_n)$ au passage ?
Puis on rédige : en partant de ce qui converge (donc pas de convergence à montrer, déjà fait !), et en vérifiant bien les hypothèses avant tout ($x = 4p(1-p) \in]0,1[$ sorti du chapeau).

Donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$ existe, et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}}$$

Ainsi, lorsque le nombre de pas augmente (tend vers $+\infty$), le nombre moyen de passage à l'origine plafonne, et tend vers une limite finie : il y a un nombre (moyen) fini de passage à l'origine.

9) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse, car $T_0 = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 7,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}(T_n) + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\ &= \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} && (\mathcal{H}_n) \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(4(2n+1)\frac{(2n)!(n+1)!^2}{n!^2(2n+2)!} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(4(2n+1)\frac{(2n)!n!^2(n+1)^2}{n!^2(2n+2)(2n+1)(2n)!} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{4(n+1)^2}{2(n+1)} + 1\right) \\ &= \frac{2n+3}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\end{aligned}$$

Au brouillon, écrire le but, pour guider les calculs.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}}$

On peut aussi remarquer que, sur $]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Donc leur produit, via le théorème sur le produit de Cauchy, s'écrit, sur $]-1,1[$,

$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}x^n$$

Car $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ avec $b_{n-k} = 1$.

Or $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ entraîne, par théorème de dérivation terme à terme des séries entières,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

D'où, par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = 2(n+1)a_{n+1}$$

Avec quelques calculs, on retombe sur le résultat montré par récurrence.

D'après les calculs de la question 5,

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

Donc

$$\mathbb{E}(T_n) \sim \frac{2n+1}{\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = +\infty}$$

Si $p = 1/2$ (cas $+1$ et -1 équiprobables lors d'un déplacement), alors le nombre moyen de passage à l'origine tend vers $+\infty$ lorsque le nombre de pas tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (CCINP PSI 2023)

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

1) La matrice $M(a,b)$ est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral,

$$\boxed{M(a,b) \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée}}$$

2) Calculons :

$$M(a,b)V = \begin{pmatrix} b+(n-1)a \\ \vdots \\ b+(n-1)a \end{pmatrix} = (b+(n-1)a)V$$

Donc, comme $V \neq 0$,

$$\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } M(a,b) \text{ pour la valeur propre } \lambda = b+(n-1)a}$$

3) *Comme toujours, si le cas n quelconque vous trouble, testez pour n petit.*
Déterminons le polynôme caractéristique de $M(1,0)$:

$$\begin{aligned}
P_{1,0}(X) &= \det(XI_n - M_{1,0}) \\
&= \begin{vmatrix} X & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & X & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & X \end{vmatrix} && C_1 \longleftarrow \sum_{j=1}^{n} C_j \\
&= (X-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & X & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \dots & -1 & X \end{vmatrix} && \forall j > 1, \quad C_j \longleftarrow C_1 + C_j \\
&= (X-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & X+1 & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & X+1 \end{vmatrix} && \text{Triangulaire inférieure} \\
&= (X-(n+1))(X+1)^{n-1}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}}$$

4) *Le calcul de $P_{a,b}$ est identique à celui de $P_{1,0}$, mais non nécessaire ici.*

$$\begin{aligned}
P_{a,b}(X) &= \det(XI_n + bI_n - aM(1,0)) \\
&= a^n \det\left(\left(\frac{X+b}{a}\right)I_n - M(0,1)\right) && \text{car } a \neq 0 \\
&= a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)}$$

Ainsi $P_{a,b}(X) = (X-b-(n-1)a)(X-b+a)^{n-1}$:

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{Les valeurs propres de } M(a,b) \text{ sont } \lambda = b+(n-1)a \text{ de multiplicité } 1 \\ \lambda = b-a \text{ de multiplicité } n-1 \end{array}}$$

Car $b+(n-1)a = b-a$ si et seulement si $a=0$ ou $n=0$, ce qui est exclu ici.

5) Simplifions la formule :

$$\begin{aligned}
M(a,b) - (b-a)I_n &= bI_n + aM(1,0) - bI_n + aI_n \\
&= aM(1,1) \\
M(a,b) - (b+(n-1)a)I_n &= bI_n + aM(1,0) - bI_n - (n-1)aI_n \\
&= aM(1,1) - naI_n
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}Q_{a,b}(M(a,b)) &= (M(a,b)-(b-a)I_n)(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n)\\ &= a^2M(1,1)(M(1,1)-nI_n)\\ &= a^2\Big(M(1,1)^2-nM(1,1)\Big)\end{aligned}$$

Or $M(1,1)=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, puis $M(1,1)^2=nM(1,1)$. Ainsi,

$$\boxed{Q_{a,b}(M(a,b))=0}$$

Si $a\neq 0$, $Q_{a,b}$ est scindé à racines simples ($b-a\neq b+(n-1)a$) donc, par théorème de diagonalisation, $M(a,b)$ est diagonalisable.
Si $a=0$, $M(0,b)=bI_n$ est diagonale, donc diagonalisable. Ainsi

$$\boxed{M(a,b)\text{ est diagonalisable}}$$

6) D'après le théorème de division euclidienne, il existe $B\in\mathbb{C}[X]$ et $R\in\mathbb{C}[X]$ tels que

$$X^k = BQ_{a,b}+R \quad\text{avec}\quad \deg(R)<\deg Q_{a,b} \tag{1}$$

Or $\deg(Q_{a,b})=2$, donc $R=\alpha X+\beta$ de degré 1. On évalue (1) en $X=b-a$ et $X=b+(n-1)a$:

$$\begin{aligned}&\begin{cases}(b-a)^k = B(b-a)\times 0+\alpha(b-a)+\beta\\ (b+(n-1)a)^k = B(b+(n-1)a)\times 0+\alpha(b+(n-1)a)+\beta\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}(b-a)^k=\alpha(b-a)+\beta\\ (b+(n-1)a)^k=\alpha(b+(n-1)a)+\beta \qquad L_2\longleftarrow L_2-L_1\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}(b-a)^k=\alpha(b-a)+\beta\\ (b+(n-1)a)^k-(b-a)^k=\alpha na \qquad \text{Or } a\neq 0\end{cases}\\
\iff&\begin{cases}\alpha=\Big[(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\Big]/(na)\\ \beta=(b-a)^k-\alpha(b-a)=(b-a)^k-(b-a)\Big[(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\Big]/(na)\end{cases}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{R=\frac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na}X+(b-a)^k-\frac{(b-a)\Big[(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\Big]}{na}}$$

En évaluant (1) en $X=M(a,b)$, comme $Q_{a,b}(M(a,b))=0$, il vient $M(a,b)^k=R(M(a,b))$, c'est-à-dire

$$\boxed{M(a,b)^k=\frac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na}M(a,b)+\left((b-a)^k-\frac{(b-a)\Big[(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\Big]}{na}\right)I_n}$$

Grouiik.

7) Comme combinaison linéaire de suites géométriques,

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na}=0 \quad\text{et}\quad \lim_{k\to+\infty}(b-a)^k-\frac{(b-a)\Big[(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k\Big]}{na}=0$$

De plus, par opération sur les limites de suites dans un espace vectoriel normé,

$$\lim_{k\to+\infty} M(a,b)^k = 0 \times M(a,b) + 0 \times I_n = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} M(a,b)^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}}$$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

8) **a)** Par définition de T, $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Comme $u^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$, $u^0(e_1) = \lambda_1^0 e_1$.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.

$$\begin{aligned} u^{k+1}(e_1) &= u(u^k(e_1)) \\ &= u(\lambda_1^k e_1) && (\mathcal{H}_k) \\ &= \lambda_1^k u(e_1) && \text{linéarité de } u \\ &= \lambda_1^{k+1} e_1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k \geqslant 0 \quad u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après 8a,

$$\|u^k(e_1)\| = \|\underbrace{\lambda_1^k}_{\textit{scalaire}} \overbrace{e_1}^{\textit{vecteur}}\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$$

Or, par hypothèse, $|\lambda_1| < 1$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda_1|^k = 0$.
Ainsi, par opération sur les limites,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0 \quad \text{puis} \quad \lim_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0}$$

9) La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est $T = (a_{ij})$. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base,

$$u(e_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i+1} e_k$$

Or T est triangulaire supérieure, et $a_{kk} = \lambda_k$:

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + \sum_{k=1}^{i} a_{k,i+1} e_k$$

Comme $x = \sum\limits_{k=1}^{i} a_{k,i+1} e_k \in \mathrm{Vect}\,(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}$,

$$\boxed{\exists x \in \mathrm{Vect}\,(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}, \quad u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: En $k=1$,
$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = \lambda_{i+1}^{1-0-1} u^0(x) = x$$
Donc $\mathcal{H}_1$ d'après ci-dessus.
- $\underline{\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.
$$\begin{aligned} u^{k+1}(e_{i+1}) &= u^k(u(e_{i+1})) \\ &= u^k\left(\lambda_{i+1} e_{i+1} + x\right) && (\mathcal{H}_1) \\ &= \lambda_{i+1} u^k(e_{i+1}) + u^k(x) && u^k \text{ linéaire} \\ &= \lambda_{i+1}\left(\lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)\right) + u^k(x) && (\mathcal{H}_k) \\ &= \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k+1-m-1} u^m(x) + \lambda_{i+1}^{k+1-k-1} u^k(x) \\ &= \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \end{aligned}$$
Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 1 \quad u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)}$

10) **a)** *Cette question utilise une méthode de type « Cesàro » pour déterminer la limite de la somme. Elle est clairement délicate.*

Par inégalité triangulaire,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|$$
En notant $q = |\lambda_{i+1}|$ et $a_m = \|u^m(x)\|$, on va montrer que
$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} = 0$$
puis conclure par majoration.

- $\underline{\text{Montrons que } \lim_{m\to+\infty} a_m = 0}$: Soit $m \in \mathbb{N}$.
On a $x = \sum_{j=1}^{i} x_j e_j \in \operatorname{Vect}(e_j)_{j\in[\![1;i]\!]}$, donc $u^m(x) = \sum_{j=1}^{i} x_j u^m(e_j)$ par linéarité de u^m.
Or, par hypothèse, pour tout $j \in [\![1;i]\!]$, $\lim_{m\to+\infty} u^m(e_j) = 0$.
Donc $\lim_{m\to+\infty} u^m(x) = 0$ comme combinaison linéaire de limites nulles :
$$\lim_{m\to+\infty} a_m = 0$$
- $\underline{\text{Montrons que } \lim_{k\to+\infty} \sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} = 0}$. Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $\lim_{m\to+\infty} a_m = 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall m \geqslant m_0, \qquad 0 \leqslant a_m \leqslant \varepsilon$$

Soit un m_0 qui convient. *Ici, même idée que pour Cesàro.*

$$\sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} = \underbrace{\sum_{m=0}^{m_0-1} a_m q^{k-m-1}}_{A_k} + \underbrace{\sum_{m=m_0}^{k-1} a_m q^{k-m-1}}_{B_k}$$

Or

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{m=m_0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} \\
&\leqslant \sum_{m=m_0}^{k-1} \varepsilon q^{k-m-1} && \text{Car } m \geqslant m_0 \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{m=0}^{k-m_0-1} q^m && \text{Changement d'indice } \textit{(pointillés au brouillon)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{1-q} && \text{Somme géométrique, } q \in [0,1[.
\end{aligned}$$

Et, pour A_k, qui est une somme d'un nombre fini de termes,

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{m=0}^{m_0-1} a_m q^{k-m-1} && \text{Or } q \in [0,1[\text{ donc } q^{k-m-1} \leqslant q^{k-m_0-1} \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{m_0-1} a_m q^{k-m_0-1} && \text{Car } a_m \geqslant 0 \\
&\leqslant K q^{k-m_0-1} && \text{avec } K = \sum_{m=0}^{m_0-1} a_m \text{ constante par rapport à } k
\end{aligned}$$

Comme $q \in [0,1[$, $\lim\limits_{k\to+\infty} q^{k-m_0-1} = 0$, posons $k_0 \geqslant m_0$ tel que

$$\forall k \geqslant k_0, \qquad K q^{k-m_0-1} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall k \geqslant k_0, \qquad 0 \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} = A_k + B_k \leqslant \left(1 + \frac{1}{1-q}\right)\varepsilon$$

Si on veut être très propre et couper les ε en morceaux, on remplace ε par $(1-q)\varepsilon/2$ lors du choix de m_0, et ε par $\varepsilon/2$ lors de celui de k_0. Alors, on trouve $0 \leqslant A_k + B_k \leqslant \varepsilon$.

Par définition de la limite,

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1} = 0$$

- <u>Conclusion</u> : Comme

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} a_m q^{k-m-1}$$

par encadrement,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0}$$

b) *Cette question est nettement plus abordable.*

D'après la question 9,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$$

Or d'après 10a, $\lim_{k\to+\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = 0$.

Et, comme $|\lambda_{i+1}| < 1$, $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{i+1}^k = 0$, puis $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{i+1}^k e_{i+1} = 0$.

Ainsi, comme combinaison linéaire de suites convergentes, il vient

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0}$$

11) Nous venons de montrer par récurrence que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$$

Initialisation à la question 8b, hérédité à la question 10b.

Notons $(t_{ij}^{(k)}) = T^k$ les coefficients de T^k. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ fixé. Par définition,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad u^k(e_j) = \sum_{i=1}^n t_{ij}^{(k)} e_i$$

Donc $(t_{ij}^{(k)})_i$ est le vecteur colonne des coordonnées de $u^k(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Or, comme $\lim_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$, toutes ses coordonnées tendent vers 0 :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \lim_{k\to+\infty} t_{ij}^{(k)} = 0$$

Ainsi, tous les coefficients de T^k tendent vers 0 lorsque $k \to +\infty$:

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} T^k = 0}$$

12) *Là aussi, c'est abordable.*

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique de A est scindé. Donc, d'après le théorème de trigonalisation, A est trigonalisable : soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que

$$A = PTP^{-1}$$

Les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A, donc vérifient $|\lambda_i| < 1$ pour tout i. De plus, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad A^k = PT^kP^{-1}$$

D'après la question 11, $\lim_{k\to+\infty} T^k = 0$.

Par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *de dimension finie*,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A^k = 0}$$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

13) M est triangulaire inférieure, et les coefficients diagonaux vérifient

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n |a_{i,j}| > 0$$

Donc $\det M = \prod_{i=1}^n a_{ii} > 0$, en particulier non nul :

$$\boxed{M \text{ est inversible}}$$

14) Comme $AX = Y$ et $A = M - F$, alors

$$AX = MX - FX = Y$$

Comme M est inversible, il vient

$$X - M^{-1}FX = M^{-1}Y$$

Avec $B = M^{-1}F$, on trouve donc

$$\boxed{X = BX + M^{-1}Y}$$

15) Par définition, $BV = \lambda V$. Or $B = M^{-1}F$, donc en multipliant par M,

$$\boxed{FV = \lambda MV}$$

Effectuons les produits matriciels : comme F est triangulaire supérieure stricte,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (FV)_i = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}v_j = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j$$

Et, de même,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (MV)_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_j = a_{ii}v_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j$$

Donc $FV = \lambda MV$ s'écrit $-\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_j = \lambda a_{ii}v_i + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j$, puis

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right)}$$

16) L'ensemble $\{|v_j| \mid j \in [\![1, n]\!]\}$ est fini, donc le maximum est atteint en un $i_0 \in [\![1, n]\!]$.
De plus, V est un vecteur propre, donc $V \neq 0$, par conséquent $|v_{i_0}| > 0$.
En prenant le module de l'égalité précédente, il vient

$$\begin{aligned}
|\lambda a_{i_0,i_0}v_{i_0}| &= \left|-\left(\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j}v_j\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}||v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}||v_j| && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}||v_{i_0}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}||v_{i_0}| && \text{On majore } |v_j| \text{ par } \|V\|_\infty = |v_{i_0}|\text{, classique} \\
\Rightarrow |\lambda a_{i_0,i_0}| &\leqslant \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| && \text{Car } |v_{i_0}| > 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{|\lambda a_{i_0,i_0}| \leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right).}$$

17) Montrons que $|\lambda| < 1$: supposons $|\lambda| \geqslant 1$. Alors l'inégalité précédente entraîne

$$\begin{aligned}
|\lambda a_{i_0,i_0}| &\leqslant \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right) \\
&\leqslant \left(|\lambda| \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right) \qquad \text{Car } \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| \geqslant 0 \\
&\leqslant |\lambda| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|
\end{aligned}$$

Or A est à diagonale strictement dominante :

$$|a_{i_0,i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Comme $\lambda \neq 0$, c'est absurde. Conclusion :

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$

Limite : D'après la question 12, si la matrice B a toutes ses valeurs propres de module strictement plus petit que 1 (ce qui est le cas ici),

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} B^k = 0}$$

18) D'après la question 14 : $X = BX + M^{-1}Y$.
Par définition de (X_k), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$.
Ainsi $X_{k+1} - X = B(X_k - X)$. Par récurrence, il vient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)}$$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = 0$ d'après 17, par continuité du produit matriciel

$$\lim_{k\to+\infty} (X_k - X) = \Big(\lim_{k\to+\infty} B^k\Big)(X_0 - X) = 0 \times (X_0 - X) = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} X_k = X}$$

FIN DE L'ÉPREUVE