Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (BECEAS 2021)

1) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $(X=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y,X=k)$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. On simplifie : $(X=Y,X=k)=(Y=k,X=k)$, et par indépendance de X et Y,

$$\mathbb{P}(X=Y,X=k)=\mathbb{P}(Y=k,X=k)=\mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(X=k)$$

Comme X et Y ont même loi, $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=k)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)^2}$$

2) **a)** Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}\left(I\geqslant k\right)=\mathbb{P}\left(X\geqslant k\cap Y\geqslant k\right).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{P}\left(I\geqslant k\right)=\mathbb{P}\left(X\geqslant k\right)^2.$$

X suivant une loi géométrique de paramètre p, et en posant $q=1-p$ on déduit

$$\mathbb{P}\left(I\geqslant k\right)=q^{2(k-1)}.$$

Donc $\mathbb{P}\left(I=k\right)=\mathbb{P}\left(I\geqslant k\right)-\mathbb{P}\left(I\geqslant k+1\right)=q^{2(k-1)}(1-q^2)$. Ainsi $I\sim\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

b) $\mathbb{P}\left(I=i,D=d\right)=\mathbb{P}\left(I=i,M=d+i\right)$.

- Si $d=0$, $(I=i,M=d+i)=(I=i,M=i)=(X=i,Y=i)$ donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(I=i,M=d+i\right)&=\mathbb{P}\left(X=i,Y=i\right)\\&=\mathbb{P}\left(X=i\right)^2&&\text{par indépendance de } X \text{ et } Y\text{, qui sont de même loi}\\&=q^{2(i-1)}p^2\end{aligned}$$

- Si $d\neq 0$, $(I=i,M=d+i)=(X=i,Y=d+i)\cup(X=d+i,Y=i)$, union disjointe :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(I=i,M=d+i\right)&=\mathbb{P}(X=i,Y=d+i)+\mathbb{P}(X=d+i,Y=i)\\&=2\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(X=d+i)&&\text{indépendance et même loi}\\&=2q^{d+2(i-1)}p^2\end{aligned}$$

c) Les événements $(I=i)_{i in \mathbb{N}^*}$ formant un système complet, on a

$$\mathbb{P}\left(D=d\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(I=i,D=d\right)$$

En distinguant les deux cas précédents :

- $\mathbb{P}\left(D=0\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}q^{2(i-1)}p^2=\frac{p^2}{1-q^2}=\frac{p}{1+q}$.
- Si $d\neq 0$, $\mathbb{P}\left(D=d\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}2q^{d+2(i-1)}p^2=\frac{2pq^d}{1+q}$.

d) En reprenant les valeurs obtenues ci-dessus, on vérifie que pour tous les couples $(i,d)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(I=i,D=d\right)=\mathbb{P}\left(I=i\right)\mathbb{P}\left(D=d\right)$:
Si $d=0$,

$$\mathbb{P}(I=i)\mathbb{P}(D=0)=q^{2(i-1)}(1-q^2)\frac{p}{1+q}=q^{2(i-1)}(1-q)p=\mathbb{P}(I=i,D=0)$$

Si $d\neq 0$,

$$\mathbb{P}(I=i,D=d)=2q^{d+2(i-1)}p^2=q^{2(i-1)}(1-q^2)\frac{2pq^q}{1+q}=\mathbb{P}(I=i,D=d)$$

Les deux variables sont indépendantes.

3) **a)** $(D=0)=(X=Y)$ donc, d'après 1),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(D=0\right)&=\mathbb{P}\left(X=Y\right)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=k\right)^2\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k^2\end{aligned}$$

b) On reprend le même calcul qu'au (2.b)

$$\mathbb{P}\left(I>k\right)=\mathbb{P}\left(X>k\cap Y>k\right).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{P}\left(I>k\right)=\mathbb{P}\left(X>k\right)^2=\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i\right)^2.$$

c) On calcule de deux manières différentes $\mathbb{P}\left(I>k,D=0\right)$.

- D'une part, $\mathbb{P}\left(I>k,D=0\right)=\mathbb{P}\left(X=Y,X>k\right)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i^2$.
- D'autre part, comme I et D sont indépendantes, $\mathbb{P}\left(I>k,D=0\right)=\mathbb{P}\left(I>k\right)\mathbb{P}\left(D=0\right)=b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i\right)^2$.

On conclut donc que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i^2=b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i\right)^2.$$

d) **i)** On fait la différence des égalités ci-dessus pour k et $k-1$:

$$p_k^2 = bp_k \left(p_k + 2 \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right) \right) = bp_k \left(p_k + 2\mathbb{P}\left(X > k\right) \right),$$

ce qui, puisque les p_k sont non nuls, peut se réécrire

$$p_k(1-b) = 2b\mathbb{P}\left(X > k\right).$$

ii) La formule ci-dessus, pour $k=1$, donne $(1-b)p_1 = 2b\left(1-p_1\right)$, c'est-à-dire $p_1 = \dfrac{2b}{1-b}$. En reprenant ensuite cette formule pour k et $k-1$ et en les soustrayant, il vient $(1-b)\,p_k = (1+b)\,p_{k+1}$.

e) Ainsi, la suite (p_k) est une suite géométrique. $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)$.

Exercice 2 (CCINP TSI 2021)

Partie 1 (Marche aléatoire sur un carré)

1) **a)** $\boxed{R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$

b) Par définition, $f_\theta(x,y) = R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; soit $\boxed{f_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}}$

c) Par définition, l'affixe de $f_\theta(x,y)$ est : $(x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$; or

$(x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta) = x\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) + iy\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = \boxed{e^{i\theta}(x+iy)}$

2) **a)** Tout d'abord, une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss permet d'affirmer que l'équation complexe $z^n - 1 = 0$ admet n racines (en tenant compte des mutiplicités).
Ensuite, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$; $(\omega_k)^n = \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n \underset{\text{Moivre}}{=} e^{i2k\pi} = 1$; donc ω_k est racine de l'équation $z^n - 1 = 0$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\boxed{\text{Les racines } n\text{−ième de l'unité sont bien } \{\omega_k,\ \text{pour } k \in [\![0, n-1]\!]\}}$

b) $r_{2\pi/n}(\omega_k) = e^{i\frac{2\pi}{n}}\omega_k = e^{i\frac{2\pi}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{(2k+2)\pi}{n}}$ on a bien :

$$\boxed{r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}}$$

c) Pour $n = 4$; $\boxed{\omega_0 = e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{4}} = 1\ ;\ \omega_1 = e^{i\frac{2\times 1\times\pi}{4}} = i\ ;\ \omega_2 = e^{i\frac{2\times 2\times\pi}{4}} = -1\ ;\ \omega_3 = e^{i\frac{2\times 3\times\pi}{4}} = -i}$

3) **a)** L'affixe A_{n+1} est obtenue à partir de l'affixe A_n, soit par une rotation dans le sens trigonométrique d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, dans ce cas $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}}A_n$; soit par une rotation dans le sens horaire d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et dans ce cas
$A_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}}A_n$; or la variable aléatoire D_n vaut 1 si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et vaut -1 si elle s'effectue dans le sens inverse, donc $\boxed{A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n}$

b) Les événement $\big\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\big\}$ forment un système complet d'événement, donc, d'après la formule des probabilités totales :
$P(A_{n+1} = 1) = P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = 1)\big) + P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = i)\big) + P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = -1)\big) + P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = -i)\big)$
L'événement $(A_{n+1} = 1)$ n'est réalisable que si $(A_n = i)$ ou $(A_n = -i)$, donc $P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = 1)\big) = 0$ et $P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = -1)\big) = 0$; il reste :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) &= P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = i)\big) + P\big((A_{n+1} = 1)\cap(A_n = -i)\big) \\ &= P(A_n = i)P_{(A_n = i)}(A_{n+1} = 1) + P(A_n = -i)P_{(A_n = -i)}(A_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

or l'aiguille se déplace dans le sens trigonométrique ou le sens inverse avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc : $P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$ et $P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$; on a bien :

$$\boxed{P(A_{n+1}=1)=\frac{1}{2}P(A_n=i)+\frac{1}{2}P(A_n=-i)}$$

c) De même, on a : $\boxed{\begin{array}{l} P(A_{n+1}=i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1) \\ P(A_{n+1}=-1)=\frac{1}{2}P(A_n=i)+\frac{1}{2}P(A_n=-i) \\ P(A_{n+1}=-i)=\frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1) \end{array}}$

d) La matrice M est symétrique réelle donc $\boxed{\text{est diagonalisable dans } \mathbb{R}}$

e) La matrice M possède deux colonnes identiques, donc pas définition son déterminant est nul et donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

f) $M(1,-1,1,-1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1,-1,1,-1)=-1\cdot(1,-1,1,-1)$;

on en déduit que

$$\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } M \text{ associée au vecteur propre } (1,-1,1,-1)}$$

g) $M(1,1,1,1)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc $M(1,1,1,1)=1\cdot(1,1,1,1)$; on en déduit que

$$\boxed{\text{le vecteur } (1,1,1,1) \text{ est un vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$$

h) On note (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; $\mathrm{Im}\,(M)=\mathrm{Vect}\,(Me_1,Me_2,Me_3,Me_4)$; soit

$\mathrm{Im}\,(M)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; une base de $\mathrm{Im}\,(M)$ est

donc $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathbb{R}^4)=\dim(\mathrm{Ker}\,(M))+\dim(\mathrm{Im}\,(M))$;
on vient de montrer que $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$, on en déduit donc que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M))=2$.
$\mathrm{Ker}\,(M)$ est un sous-espace propre de M de dimension 2 ; de plus 1 et -1 sont des valeurs propres de M donc les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont de dimension au moins égale à 1. On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 4, la dimension de $\mathbb{R}^4$ et on retrouve ainsi le fait que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

i) Si $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$; alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1} = 1) \\ P(A_{n+1} = i) \\ P(A_{n+1} = -1) \\ P(A_{n+1} = -i) \end{pmatrix}$.

Les résultats des questions **Q38** et **Q39** permettent d'écrire : $U_{n+1} = MU_n$; on démontrerait par récurrence que $U_n = M^n U_0$. Un calcul de M^n en utilisant la relation $M^n = PD^nP^{-1}$, avec P la matrice constituée des vecteurs propres et $D = \text{diag}(0, 0, 1, -1)$, nous donnerait le vecteur U_n.

Partie 2

1) a) Si X suit une loi de Rademacher, alors $X(\Omega) = \{-1, 1\}$; en particulier X admet un nombre fini de valeurs (2 valeurs exactement) donc $\boxed{X \in V_f(\Omega)}$

Par définition, $E(X) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = (-1) \times P(X = -1) + 1 \times P(X = 1) = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}$;

soit $\boxed{E(X) = 0}$

b)
- La variable nulle suit une loi certaine et admet une seule valeur, 0, donc la variable nulle appartient à $V_f(\Omega)$.
- Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Alors la variable $\lambda X_1 + X_2$ prend un nombre fini de valeurs et ainsi $\lambda X_1 + X_2 \in V_f(\Omega)$

On a montré que $\boxed{V_f(\Omega) \text{ est un } \mathbb{R}\text{−espace vectoriel}}$

c)
- *Symétrie :* $\Phi(Y, X) = E(YX) = E(XY) = \Phi(X, Y)$; donc Φ est symétrique.
- *Bilinéarité :* Soient X_1 et X_2 deux variables finies et $\lambda \in \mathbb{R}$;
  $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = E\big((\lambda X_1 + X_2)Y\big) = E\big(\lambda X_1 Y + X_2 Y\big) = \lambda E(X_1 Y) + E(X_2 Y)$ par linéarité de l'espérance ; donc $\Phi(\lambda X_1 + X_2, Y) = \lambda \Phi(X_1, Y) + \Phi(X_2, Y)$; ainsi Φ est linéaire à gauche, et par symétrie, on en déduit que Φ est bilinéaire.
- *Positivité :* $\Phi(X, X) = E(X^2) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$; avec $P(X = x) \in [0, 1]$ et $x^2 \geqslant 0$;
  on en déduit $\Phi(X, X) \geqslant 0$ et Φ est positive.
- *Définie-Positivité :* $\Phi(X, X) = 0$ *sietseulementsi* $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = 0$; or une somme de termes positifs ou nuls est nulle si et seulement chaque terme est nul ; donc $\forall x \in X(\Omega)$, $x^2 P(X = x) = 0$; alors, soit $P(X = x) = 0$ et alors l'événement $(X = x)$ est impossible ; soit $x = 0$. Finalement la seule valeur possible pour X est 0 et ainsi X est la variable nulle.

Φ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive ; donc $\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } V_f(\Omega)}$

2) a)
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$; $\|X_i\|^2 = \Phi(X_i, X_i) = E(X_i^2) = \displaystyle\sum_{x \in X_i(\Omega)} x^2 P(X_i = x)$; or X_i suit une loi de Rademacher, donc $\|X_i\|^2 = (-1)^2 \times \dfrac{1}{2} + (1)^2 \times \dfrac{1}{2}$; on a bien $\|X_i\| = 1$.
- Soit $i \neq j$, $\Phi(X_i, X_j) = E(X_i X_j) = \displaystyle\sum_{x_i \in X_i(\Omega)} \sum_{x_j \in X_j(\Omega)} x_i x_j P\big((X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)\big)$; X_i et X_j suivent des lois de Rademacher, donc :
  $$\begin{aligned}\Phi(X_i, X_j) = &(-1) \times (-1)P\big((X_i = -1) \cap (X_j = -1)\big) + (-1) \times (1)P\big((X_i = -1) \cap (X_j = 1)\big) \\ &+ (1) \times (-1)P\big((X_i = 1) \cap (X_j = -1)\big) + (1) \times (1)P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) ;\end{aligned}$$
  de plus X_i et X_j sont indépendantes, donc :
  $$\begin{aligned}\Phi(X_i, X_j) = &(-1) \times (-1)P(X_i = -1) \times P(X_j = -1) + (-1) \times (1)P(X_i = -1) \times P(X_j = 1) \\ &+ (1) \times (-1)P(X_i = 1) \times P(X_j = -1) + (1) \times (1)P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) ;\end{aligned}$$
  $$\Phi(X_i, X_j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

Les $(X_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, donc :

$$\boxed{(X_1, ..., X_n) \text{ est une famille orthogonale de } V_f(\Omega) \text{ pour le produit scalaire } \Phi}$$

b) $F = \text{Vect}\ (X_1, ..., X_n)$; la famille génératrice de F est une famille orthonormale, donc est également une famille libre ; ainsi cette famille est une base de F et donc $\boxed{\dim(F) = n}$

c) Soit $X \in V_f(\Omega)$, indépendante des $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$; $\Phi(X, X_i) = E(XX_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{x_i\in\{-1,1\}} xx_iP\big((X = x) \cap (X_i = x_i)\big)$; soit
$\Phi(X, X_i) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x \times (-1)P\big((X = x) \cap (X_i = -1)\big) + \sum_{x\in X(\Omega)} x \times (1)P\big((X = x) \cap (X_i = 1)\big)$; et par indépendance :

$$= -\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) \times P(X_i = -1) + \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) \times P(X_i = 1)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) + \frac{1}{2}\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x) = -\frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X)$$

ce qui donne : $\Phi(X, X_i) = 0,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$; ce qui signifie que $\boxed{X \in F^\perp}$

d) Tout d'abord, $X_i \in \{-1, 1\}$; donc $X_i + 1 \in \{0, 2\}$ et $\dfrac{X_i + 1}{2} \in \{0, 1\}$;
de plus $P\left(\dfrac{X_i + 1}{2} = 0\right) = P(X_i = -1) = \dfrac{1}{2}$ et $P\left(\dfrac{X_i + 1}{2} = 1\right) = P(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$;
donc la variable $\dfrac{X_i + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
Ainsi X est une somme de n variables indépendantes de Bernoulli, d'après le cours :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{1}{2}}$$

Par définition, $d(X, F) = \|X - p_F(X)\|$, où $p_F(X)$ est le projeté orthogonal de X sur F défini par :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(X, X_i)X_i$$

or $\Phi(X, X_i) = E\left(\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{X_j + 1}{2}\right) X_i\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} E\left(X_jX_i + X_i\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} E(X_jX_i) + \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\,0}$

si $i \neq j$, $E(X_jX_i) = 0$ et si $i = j$, $E(X_i^2) = 1$; donc $\Phi(X, X_i) = \dfrac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{p_F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Première méthode plus longue, mais utilisant des résultats intéressants :
D'après le théorème de Pythagore : $\|X\|^2 = \|p_F(X)\|^2 + \|X - p_F(X)\|^2$; soit $\|X - p_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|p_F(X)\|^2$
$\|X\|^2 = \Phi(X, X) = E(X^2) = V(X) + \big(E(X)\big)^2$, où V est la variance de X. (On rappelle la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$) On a démontré que X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$, donc $E(X) = np = \dfrac{n}{2}$ et $V(X) = np(1 - p) = \dfrac{n}{4}$ et ainsi $\|X\|^2 = \dfrac{n}{4} + \dfrac{n^2}{4} = \dfrac{n^2 + n}{4}$.
Dans la base **orthonormale** $\{X_1, ..., X_n\}$ de F, la variable $p_F(X)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, ..., \dfrac{1}{2}\right)$;
donc $\|p_F(X)\|^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{n}{4}$.
Finalement : $\|X - p_F(X)\|^2 = \dfrac{n^2 + n}{4} - \dfrac{n}{4} = \dfrac{n^2}{4}$ et donc : $\boxed{d(X, F) = \dfrac{n}{2}}$

Deuxième méthode plus courte :

On sait que $X=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i+1}{2}$ et $p_F(X)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}X_i$; donc $X-p_F(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$ et $Y=X-p_F(X)$ est une variable qui suit une loi certaine de valeur $\frac{n}{2}$.

$\|Y\|^2=\Phi(Y,Y)=E(Y^2)=\left(\frac{n}{2}\right)^2\times P\left(Y=\frac{n}{2}\right)=\frac{n^2}{4}\times 1$ et ainsi $\|Y\|=\frac{n}{2}$. On retrouve : $\boxed{d(X,F)=\frac{n}{2}}$

Exercice 3 (Extrait de Mines-Ponts PC-PSI, 2021)

Rq. Dans tout ce corrigé, on supposera, plus généralement et plus précisément que ce qui est fait dans l'énoncé, que l'on a :

$$X(\Omega)\subset\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\},$$

où les x_n, pour $n\in\mathbb{N}$, sont deux à deux distincts. Cela évite en particulier des cas par cas fastidieux dans les questions de cours, pour distinguer les cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Questions de cours

1)
- Par définition, X est d'espérance finie si la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ converge absolument.
- Par théorème de transfert appliqué à la fonction valeur absolue $|\cdot|$, on a alors :

$$\begin{aligned}|X| \text{ est d'espérance finie} &\iff \text{la série } \sum |x_n|\mathbb{P}(X=x_n) \text{ converge absolument}\\ &\iff \text{la série } \sum x_n\mathbb{P}(X=x_n) \text{ converge absolument}\\ &\iff X \text{ est d'espérance finie.}\end{aligned}$$

2) Soit $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(|X|\leqslant M)=1$. On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |x_n|\mathbb{P}(X=x_n)\leqslant M\mathbb{P}(X=x_n),$$

c'est clair si $|x_n|\leqslant M$, et c'est encore vrai si $|x_n|>M$ car on a alors $\{X=x_n\}\subset\{|X|>M\}$, donc par croissance des probabilités, $0\leqslant\mathbb{P}(X=x_n)\leqslant\mathbb{P}(|X|>M)=1-\mathbb{P}(|X|\leqslant M)=0$, donc $\mathbb{P}(X=x_n)=0$ (de sorte que l'inégalité voulue est $0\leqslant 0$).
Or la série $\sum\mathbb{P}(X=x_n)$ converge, donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum|x_n|\mathbb{P}(X=x_n)$ converge, i.e. X admet une espérance.

Généralités sur les variables aléatoires

1) On suppose que $X(\Omega)\subset\mathbb{Z}$ et que X vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$ où $\alpha>0$.
- La variable aléatoire $|X|$ est alors à valeurs dans $\mathbb{N}$, de sorte que si $|X|$ admet une espérance, alors la série $\sum\mathbb{P}(|X|\geqslant n)$ converge[1].
  Or par $\mathcal{D}_\alpha$, on a $\mathbb{P}(|X|\geqslant n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\alpha}{n}$, et la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum\mathbb{P}(|X|\geqslant n)$ diverge aussi.
  Ainsi $|X|$ n'admet pas d'espérance, donc X non plus d'après la question **1**.
- On sait que si X^2 admet une espérance (i.e. si X admet une variance), alors X admet une espérance, donc par contraposée, X^2 n'admet pas d'espérance non plus.

2) On suppose que X est symétrique et que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction impaire.
- Comme X est symétrique, X et $-X$ suivent la même loi, donc par le théorème 1 du préambule, $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi. Mais f est impaire, donc $f(-X)=-f(X)$.
  Ainsi $f(X)$ et $-f(X)$ suivent la même loi, i.e. $f(X)$ est symétrique.

1. C'est même une équivalence, et on a alors $\mathbb{E}(|X|)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(|X|\geqslant n)$.

- Si $f(X)$ est d'espérance finie, alors puisque $-f(X)$ suit la même loi que $f(X)$, cette variable $-f(X)$ est aussi d'espérance finie et $\mathbb{E}(-f(X)) = \mathbb{E}(f(X))$.
  Mais par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(-f(X)) = -\mathbb{E}(f(X))$, donc $\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

3) On suppose X et Y symétriques et indépendantes. Posons $Z = (X, Y)$.

- On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = (x,y)) &= \mathbb{P}(X = x, Y = y) \quad \text{par définition} \\
&= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \mathbb{P}(X = -x)\mathbb{P}(Y = -y) \quad \text{par symétrie de } X \text{ et } Y \\
&= \mathbb{P}(X = -x, Y = -y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \mathbb{P}(-X = x, -Y = y) \\
&= \mathbb{P}(-Z = (x,y)) \quad \text{par définition.}
\end{aligned}$$

  Donc $Z = (X, Y)$ et $-Z = (-X, -Y)$ suivent la même loi (i.e. Z est symétrique si l'on ne restreint pas la définition 2 du préambule au cas des variables réelles).

- Par le théorème 1 du préambule appliqué aux variables Z et $-Z$ et à la fonction $u : X(\Omega)\times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, on voit alors que $u(Z) = X + Y$ et $u(-Z) = -X - Y$ suivent la même loi, i.e. que la variable $X + Y$ est symétrique [2].

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

Rq. Dans les questions **14** et **15**, la symétrie de X ne sert pas.

1) Soit $t \in \mathbb{R}$.

- La variable aléatoire $Y_t = \cos(tX)$ est bornée, comprise entre -1 et 1, donc par la question **2**, Y_t est d'espérance finie, i.e. $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(Y_t)$ est bien défini, et par croissance de l'espérance :

$$-1 = \mathbb{E}(-1) \leqslant \mathbb{E}(Y_t) = \Phi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(1) = 1.$$

  Donc la fonction Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

- De plus, on a évidemment $Y_t = \cos(tX) = \cos(-tX) = Y_{-t}$ puisque cos est une fonction paire, donc $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_{-t}) = \Phi_X(-t)$, donc la fonction Φ_X est paire.

2) Par théorème de transfert, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)$.

Donc Φ_X est la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto \mathbb{P}(X = x_n)\cos(tx_n)$. On applique alors le théorème de continuité des séries de fonctions.

- ⋆ Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (puisque cos l'est).
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |u_n(t)| = \mathbb{P}(X = x_n)$, et la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le théorème s'applique et montre que la somme $\Phi_X = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

FIN DE L'ÉPREUVE

2. On pourrait avoir envie d'appliquer le 1er point de la question **4** ici, plutôt que se ramener à nouveau au théorème 1, mais on est dans un cadre différent : la variable Z n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $u : (x+y) \mapsto x+y$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.