Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Une caractérisation de la loi géométrique)

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes les deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)), \quad M(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega)$$

1) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2$.

2) Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pourra poser $q = 1 - p$.

- **a)** Reconnaître la loi de la variable I.
- **b)** Calculer, pour tout $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([I = i] \cap [D = d])$ (qu'on pourra noter $\mathbb{P}(I = i, D = d)$).
  On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.
- **c)** Déterminer la loi de la variable D.
- **d)** Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

3) Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
On note $b := \mathbb{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Exprimer le réel b à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- **b)** Exprimer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbb{P}(I > k)$ à l'aide de la famille $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$.
- **c)** Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant la probabilité $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \right)^2 .$$

d) **i)** En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $(1-b)\,p_k = 2\,b\,\mathbb{P}\,(X > k)$.

ii) Calculer p_1 en fonction de b puis établir, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité : $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}\,p_k$.

e) En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2 (Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.
On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \qquad P(X = -1) = \frac{1}{2} \qquad P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Partie 1 (Marche aléatoire sur un carré)

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1) Rotations du plan.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Donner la matrice dans la base canonique de la rotation f_θ d'angle θ de $E = \mathbb{R}^2$.

b) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.
À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x + iy$ dans $\mathbb{C}$.

c) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x, y)$ s'écrit $e^{i\theta}(x + iy)$.
Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta} z \qquad \text{où } z \in \mathbb{C}$$

2) Racines n-ième de l'unité.
Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i}$.

a) Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\omega_k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, déterminer $r_{2\pi/n}(\omega_k)$.

c) Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique $x + iy$ de ω_0, ω_1, ω_2 et ω_3.

3) Marche aléatoire sur un carré.
Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-i$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, i, -1, -i\}$.
On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n} A_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i)$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, de même, la loi de A_{n+1} en fonction de la loi de A_n.

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

e) La matrice M est-elle inversible ?

f) Montrer que ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

g) Montrer que -1 est valeur propre de M.

h) Déterminer le rang de M et en déduire l'ensemble des valeurs propres, ainsi que la dimension des sous-espace vectoriel associés.

i) Posons $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et d'une matrice que l'on précisera.

j) Déterminer la loi de A_n en fonction de n.

Partie 2 (Orthonormalité des lois de Rademacher)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

1) Un produit scalaire.

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X(\Omega) \text{ est fini}\}$$

a) Montrer que, si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et déterminer $E(X)$, où E désigne l'espérance.

b) Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

c) On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par

$$\forall (X,Y) \in V_f(\Omega)^2 \qquad \Phi(X,Y) = E(XY)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

2) Orthonormalité et projection.

On considère $X_1, \ldots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

a) Montrer que $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour Φ.

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \ldots, X_n$.

b) Déterminer la dimension de F.

c) Montrer que, si $X \in V_f(\Omega)$ est indépendante de chacune des variables $X_1, \ldots, X_n$), alors $X \in F^{\perp}$.

d) Soit $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(X_k + 1)$. Déterminer la loi de X, puis la distance de X à F pour la norme associée à Φ.

Exercice 3 (Extrait de Mines-Ponts PC-PSI)

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α)
On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques)
On dit que X est symétrique lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x). \tag{2}$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1
Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Partie 1 (Questions de cours)

1) Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2) Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Partie 2 (Généralités sur les variables aléatoires)

1) Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

2) Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

3) Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Partie 3 (Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique)

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose :

$$\Phi_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(\cos(tX)\right), \end{array} \right.$$

appelée fonction caractéristique de X.

1) Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

2) En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue. On pourra distinguer les cas finis et dénombrables.

FIN DE L'ÉPREUVE