Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (PT 2015)

1) Par définition, $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Comme $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
P(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) && \text{Formule des probabilités totales}\\
&= \sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}\\
&= \lambda^i e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{i} \frac{\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}\\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j(1-\alpha)^{i-j}\\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}(\alpha + 1 - \alpha)^i\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)}$$

2) De même, par définition, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme $(X = i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
P(Y = j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i, Y = j) && \text{Formule des probabilités totales}\\
&= \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{\alpha^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+j}(1-\alpha)^i}{i!} && \textit{Tiens donc...}\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\alpha\lambda)^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\big(\lambda(1-\alpha)\big)^i}{i!} && \textit{...un calcul connu ?}\\
&= e^{-\lambda}\frac{(\alpha\lambda)^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} && \text{Car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\\
&= e^{-\lambda\alpha}\frac{(\alpha\lambda)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda\alpha)}$$

3) *On a des zéros dans le tableau de la loi de couple (X, Y) : parfois, $P(X = i, Y = j) = 0$. Donc il est peu probable qu'il y ait indépendance. Essayons de vérifier la formule de l'indépendance dans une case nulle.*
Soit $i = 0$ et $j = 1$. Alors $0 \leqslant i < j$ donc

$$P(X = 0, Y = 1) = 0$$

De plus, d'après 1 et 2,

$$P(X = 0)P(Y = 1) = e^{-\lambda}\frac{1}{0!} \times e^{-\alpha\lambda}\frac{\alpha\lambda}{1!} = e^{-\lambda(1+\alpha)}\alpha\lambda \neq 0$$

car $\alpha \neq 0$ et $\lambda \neq 0$. Ainsi, $P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0)P(Y = 1)$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

4) *On procède comme pour la question de cours sur la loi de $X + Y$.*
D'après 1 et 2, $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$, donc $Z(\Omega) = \mathbb{Z}$ a priori. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Comme $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on obtient l'union disjointe suivante :

$$\begin{aligned}(Z = n) &= \bigcup_{j=0}^{+\infty}(Z = n) \cap (Y = j) && \text{Formule des probabilités totales}\\ &= \bigcup_{j=0}^{+\infty}(X = n + j) \cap (Y = j) && \text{Car } Z = X - Y = n \text{ et } Y = j \text{ entraîne } X - j = n\end{aligned}$$

Ainsi, en passant aux probabilités,

$$P(Z = n) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = n + j, Y = j)$$

Bizarre ce $Z(\Omega) = \mathbb{Z}$. Pas usuel. Donc on regarde plus précisément ce qui se passe si $n < 0$.
Si $n < 0$, alors $n + j < j$ donc $P(X = n + j, Y = j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Et, en sommant, $P(Z = n) = 0$: $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
Si $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}P(Z = n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = n + j, Y = j)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+j}e^{-\lambda}\alpha^j(1-\alpha)^{n+j-j}}{j!(n+j-j)!} && \text{D'après l'énoncé [1]}\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n(1-\alpha)^n}{n!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j\alpha^j}{j!}\\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n(1-\alpha)^n}{n!}e^{\lambda\alpha}\\ &= e^{-\lambda(1-\alpha)}\frac{\big(\lambda(1-\alpha)\big)^n}{n!}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda(1-\alpha))}$$

1. Vous venez d'écrire que X et Y ne sont pas indépendantes : on relis sagement l'énoncé, et on utilise la formule donnée.

5) Soit n un entier naturel. Comme $P(Z = n) \neq 0$, par définition d'un probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}
P(Y = j \mid Z = n) &= \frac{P(Y = j, Z = n)}{P(Z = n)} \\
&= \frac{\frac{\lambda^{n+j} e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^n}{j!n!}}{e^{-\lambda(1-\alpha)} \frac{\left(\lambda(1-\alpha)\right)^n}{n!}} && \text{D'après les calculs de la question 4} \\
&= e^{-\alpha\lambda} \frac{\lambda^j \alpha^j}{j!} \\
&= P(Y = j)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\forall (j, n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(Y = j \mid Z = n) = P(Y = j)}$

Par conséquent, $\boxed{\text{Les variables } Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes}}$

Dans la question de cours, Y représente le nombre de têtards et Z le nombre d'œufs qui n'ont pas éclos. Étonnamment, ces deux variables sont indépendantes. C'est lié aux propriétés de l'exponentielle, et vous l'avez déjà vu dans une autre question de cours :
Une autre façon de voir le même résultat consiste à se donner le nombre $Y \hookrightarrow \mathbb{P}(\lambda')$ de têtards, le nombre $Z \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu')$ d'œufs qui n'ont pas éclos supposé indépendant, et de calculer le nombre $X = Y + Z$ d'œufs pondus. Vous avez vu en question de cours que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda' + \mu')$.

6) Notons $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ le nombre d'enfants, avec $\lambda = 2{,}2$, et Y le nombre de garçons.
Soient $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$ fixés, avec $j \leqslant i$.
L'événement $(Y = j \mid X = i)$ correspond à « obtenir j garçons dans une suite de i expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes » : c'est exactement l'événement $(Y_0 = j)$ avec $Y_0 \hookrightarrow \mathscr{B}(i, p)$, avec $p = \dfrac{1}{2}$. Donc

$$P(Y = j \mid X = i) = \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}$$

Puis, par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
P(Y = j, X = i) &= P(Y = j \mid X = i) P(X = i) \\
&= \binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \frac{\lambda^i e^{-\lambda} p^j (1-p)^{i-j}}{j!(i-j)!}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(Y = j, X = i) = \frac{(1{,}1)^i e^{-2{,}2}}{j!(i-j)!}}$$

Exercice 2 (CCINP TSI 2019)

Partie 1 (Loi de X)

1) D'après l'énoncé, $\boxed{P(A_n) = p}$

2) On peut choisir une place uniquement à partir du numéro s, donc

$$\boxed{X(\Omega) = [\![s, +\infty [\![}$$

Soit $n \geqslant s$. On choisit la première place disponible à partir de s, donc si on choisit la n-ième, c'est que toutes celles entre s et n étaient occupées :

$$\boxed{(X = n) = \bar{A}_s \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n}$$

3) Les $(A_k)_k$ sont mutuellement indépendants, donc en passant aux probabilités dans la formule précédente, il vient,

$$\boxed{\forall n \geqslant s, \quad P(X=n) = (1-p)^{n-s}p}$$

4) Comme $X(\Omega) = [\![s, +\infty [\![$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(Y=n) = (X-s+1=n) = (X=n+s-1)$$

Donc $P(Y=n) = P(X=n+s-1) = p(1-p)^{n-1}$. On reconnaît une loi géométrique :

$$\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p,\ E(Y) = \frac{1}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

5) Par définition de Y, $X = Y+s-1$. Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{E(X) = E(Y)+s-1 = \frac{1}{p}+s-1}$$

Et par propriété de la variance de $aX+b$,

$$\boxed{V(X) = V(Y) = \frac{1-p}{p^2}}$$

Partie 2 (Calcul de la distance moyenne à l'arrivée)

6) D'après le théorème du transfert, $|X-d|$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum\limits_n |n-d|P(X=n)$ converge absolument.
Pour tout $n \in X(\Omega)$, notons $u_n = |n-d|P(X=n)$.

$$0 \leqslant u_n \sim_{n\to+\infty} np(1-p)^{n-s}$$

Donc, pour n assez grand (par exemple $n > s$), $u_n \neq 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}(1-p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1-p < 1$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ converge.
Conclusion :

$$\boxed{|X-d| \text{ est d'espérance finie, c'est-à-dire } E(|X-d|) = D_s \text{ existe}}$$

7) Pour $n \leqslant d$, $|n-d| = d-n$, et pour $n > d$, $|n-d| = n-d$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} D_s &= \sum_{n=s}^{+\infty} |n-d|P(X=n) && (X(\Omega) = [\![s, +\infty [\![\\ &= \sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n) \\ &= \boxed{S_1+S_2} \end{aligned}$$

8) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1}(k+1-i)x^i && \text{But : du } u_k\text{, donc on fait apparaître } k \\ &= \sum_{i=-1}^{k}(k-i)x^{i+1} && \text{décalage d'indice } i \to i+1 \\ &= k+1+xu_k \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} = k+1+xu_k}$$

9) *La question précédente nous donne une relation de récurrence : ici, l'énoncé nous invite à faire une preuve par récurrence. On peut aussi montrer directement la formule en fonction de k en reconnaissant une série géométrique et une série géométrique dérivée. Soit $k \in \mathbb{N}$.*

$$u_k = \sum_{i=0}^{k}(k-i)x^i = \sum_{i=0}^{k} kx^i - \sum_{i=0}^{k} ix^i$$

Notons $S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x^i$. Comme $x \neq 1$,

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \qquad \text{et} \qquad S'_k(x) = \sum_{i=0}^{k} ix^{i-1} = \frac{-(k+1)x^k(1-x)+(1-x^{k+1})}{(1-x)^2} \tag{1}$$

Par conséquent, en sommant,

$$\begin{aligned}
u_k &= kS_k(x) - xS'_k(x) && \textit{Le numérateur est un polynôme en } x, \\
&= \frac{k-kx^{k+1}}{1-x} - x\frac{-(k+1)x^k+(k+1)x^{k+1}+1-x^{k+1}}{(1-x)^2} && \textit{on développe et on groupe } a_0+a_1x+\dots \\
&= \frac{k}{1-x} - \frac{kx^{k+1}-kx^{k+2}}{(1-x)^2} - \frac{-(k+1)x^{k+1}+kx^{k+2}+x}{(1-x)^2} && \textit{avec l'objectif en tête} \\
&= \frac{k}{1-x} - \frac{-x^{k+1}+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{k}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(x^k-1) && \textit{Passer par } A-B=0 \textit{ pouvait être plus rapide}
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad u_k = \frac{k}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(x^k-1)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $u_0 = \sum_{i=0}^{0}(0-i)x^i = 0$, or $\frac{0}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(1-1) = 0$. Donc $\mathcal{H}_0$ vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= k+1+xu_k && \text{D'après la question 8} \\
&= k+1+x\left[\frac{k}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(x^k-1)\right] && (\mathcal{H}_k) \\
&= \frac{(k+1)(1-x)+kx}{1-x} + \frac{x^2(x^k-1)}{(1-x)^2} && \textit{au brouillon, écrire le but} \\
&= \frac{k+1-(k+1)x+kx}{1-x} + \frac{x^{k+2}-x^2}{(1-x)^2} && \textit{en bas de la page,} \\
&= \frac{k+1}{1-x} - \frac{x}{1-x} + \frac{x^{k+2}-x^2}{(1-x)^2} && \textit{pour diriger les calculs.} \\
&= \frac{k+1}{1-x} - \frac{x-x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^{k+2}-x^2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{k+1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(x^{k+1}-1)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = \frac{k}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}(x^k-1)}$

10) D'après 3), pour tout $n \geqslant s$, $P(X=n) = (1-p)^{n-s}p$. Donc

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=s}^{d}(d-n)(1-p)^{n-s}p \\
&= p\sum_{n=0}^{d-s}(d-s-n)(1-p)^n && \textit{On commence une somme à } n=0\textit{, on ajuste.} \\
&= pu_{d-s} && \text{D'après 9 avec } x = 1-p \text{ et } k = d-s \\
&= p\left(\frac{d-s}{p} + \frac{1-p}{p^2}((1-p)^{d-s}-1)\right) \\
&= d-s+\frac{1-p}{p}((1-p)^{d-s}-1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{S_1 = pu_{d-s} = d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1-p)^{d-s+1}}$$

11) Par un calcul similaire à celui de la question 7 et le théorème du Transfert,

$$\begin{aligned}
E(X-d) &= \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)P(X=n) \\
&= \sum_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n) \\
&= -S_1 + S_2
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(X-d) = E(X) - d$. Or nous avons calculé $E(X)$ à la question 5 :

$$E(X-d) = \frac{1}{p} + s - 1 - d$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_2 = E(X-d) + S_1 = \frac{1}{p}(1-p)^{d-s+1}}$$

De plus $D_s = S_1 + S_2$ d'après 7, donc

$$\boxed{D_s = d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}}$$

Partie 3 (Optimisation)

12)
$$\begin{aligned}
D_{s+1} - D_s &= d-(s+1)+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-(s+1)+1} - \left(d-s+1-\frac{1}{p}+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}\right) \\
&= -1+\frac{2}{p}(1-p)^{d-s}(1-(1-p))
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{D_{s+1} - D_s = -1 + 2(1-p)^{d-s}}$$

13)
$$\begin{aligned}
D_{s+1} - D_s \geqslant 0 &\iff (1-p)^{d-s} \geqslant \frac{1}{2} \\
&\iff (d-s)\ln(1-p) \geqslant -\ln(2) && \text{en composant par ln qui est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff d-s \leqslant \frac{-\ln(2)}{\ln(1-p)} && \text{car } 1-p \in]0;1[\text{, donc } \ln(1-p) < 0 \\
&\iff s \geqslant d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} = \alpha
\end{aligned}$$

D'où le tableau de signes :

s	0	α	$+\infty$
$D_{s+1} - D_s$	$-$	0	$+$

La suite (D_s) est décroissante pour $s \leqslant \alpha + 1$ et croissante pour $s \geqslant \alpha + 1$. Donc

$$\boxed{D_s \text{ est minimal pour } s = d + \left\lfloor \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1}$$

Donc, désormais, vous savez comment garer votre voiture.

Exercice 3 (Centrale PC 2018)

Rappels d'arithmétique

A - Loi zêta

1) Vérifions que $P(\Omega) = 1$: Pour $x > 1$, d'après Riemann, $\sum_n P(X = n)$ converge, et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) &= \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La variable aléatoire discrète } X \text{ est bien définie}}$$

2) Par définition de l'espérance, X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} nP(X = n)$ converge absolument. Or

$$\forall n \geqslant 1 \qquad nP(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-1}} > 0$$

D'après Riemann, cette série converge si et seulement si $x - 1 > 1$. De plus,

$$E(X) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

Finalement,

$$\boxed{X \text{ admet une espérance finie si et seulement si } x > 2 \text{ et } E(X) = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème du Transfert, X^k admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} n^k P(X = n)$ converge absolument. Or

$$\forall n \geqslant 1 \qquad n^k P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^{x-k}} > 0$$

D'après Riemann, cette série converge si et seulement si $x - k > 1$. De même, on trouve alors

$$\boxed{X^k \text{ admet une espérance finie si et seulement si } x > 1 + k \text{ et } E(X^k) = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}}$$

4) Par définition, X admet une variance si X^2 est d'espérance finie, donc, ici, si et seulement si $x > 2$. Dans ce cas,

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\zeta(x-2)}{\zeta(x)} - \left(\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}\right)^2}$$

5) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On décompose l'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ en une union disjointe :

$$(X \in a\mathbb{N}^*) = \bigcup_{k \in a\mathbb{N}^*} (X = k) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = an)$$

En passant aux probabilités,

$$\begin{aligned} P(X \in a\mathbb{N}^*) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = an) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x) a^x n^x} \\ &= \frac{1}{\zeta(x) a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \text{or } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ &= \frac{1}{a^x} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}}$$

B - Mutuelle indépendance

6) Décrivons l'événement $(X \in q_1\mathbb{N}^*) \cap (X \in q_2\mathbb{N}^*)$: comme q_1 et q_2 sont des nombres premiers distincts,

$$\begin{aligned} x \in q_1\mathbb{N}^* \text{ et } x \in q_2\mathbb{N}^* &\Longrightarrow q_1 \text{ divise } x \text{ et } q_2 \text{ divise } x \\ &\Longrightarrow q_1 q_2 \text{ divise } x & \text{d'après le rappel 5 d'arithmétique} \\ &\Longrightarrow x \in q_1 q_2 \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Et réciproquement,

$$x \in q_1 q_2\mathbb{N}^* \Longrightarrow q_1 q_2 \text{ divise } x \Longrightarrow q_1 \text{ divise } x \text{ et } q_2 \text{ divise } x \Longrightarrow x \in q_1\mathbb{N}^* \text{ et } x \in q_2\mathbb{N}^*$$

Donc

$$(X \in q_1\mathbb{N}^*) \cap (X \in q_2\mathbb{N}^*) = (X \in q_1 q_2\mathbb{N}^*)$$

Ainsi, d'après la question 5 pour $a = q_1 q_2$, $a = q_1$ puis $a = q_2$,

$$\begin{aligned} P\Big((X \in q_1\mathbb{N}^*) \cap (X \in q_2\mathbb{N}^*)\Big) &= P(X \in q_1 q_2\mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{(q_1 q_2)^x} \\ &= \frac{1}{q_1^x} \times \frac{1}{q_2^x} \\ &= P(X \in q_1\mathbb{N}^*) P(X \in q_2\mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Les événements } (X \in q_1\mathbb{N}^*) \text{ et } (X \in q_2\mathbb{N}^*) \text{ sont indépendants}}$$

7) De même, $q_1, \ldots, q_n$ sont des nombres premiers distincts, donc, d'après le point 5, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$(\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ q_i \text{ divise } a) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a$$

Donc
$$\bigcap_{i=1}^{n}(X \in q_i\mathbb{N}^*) = \left(X \in \Big(\prod_{i=1}^{n} q_i\Big)\mathbb{N}^*\right)$$
Toujours de même qu'à la question précédente,
$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X \in q_i\mathbb{N}^*)\right) &= P\left(X \in \Big(\prod_{i=1}^{n} q_i\Big)\mathbb{N}^*\right) \\
&= \frac{1}{\Big(\prod_{i=1}^{n} q_i\Big)^x} && \text{D'après 5} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i^x} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X \in q_i\mathbb{N}^*) && \text{D'après 5}
\end{aligned}$$

Par définition de l'indépendance mutuelle,
$$\boxed{\text{Les événements } (X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*) \text{ sont mutuellement indépendants}}$$

8) La suite (B_n) est décroissante (pour l'inclusion), donc par continuité décroissante,
$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right)$$
De plus $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=1}^{n}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

Montrons que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = (X = 1)$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ D'après le dernier point des rappels d'arithmétique, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$, il existe un nombre premier qui divise a. Donc, si $a \in \mathbb{N}^*$ n'est dans aucun $p\mathbb{N}^*$ pour tout $p \in \mathscr{P}$, alors $a = 1$.

$\boxed{\supset}$ Comme, pour tout $p \in \mathscr{P}$, $p\mathbb{N}^* \subset [\![2, +\infty[\![$, il vient : $(a = 1) \Longrightarrow a \notin \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} p_k\mathbb{N}^* \subset [\![2, +\infty[\![$.

Donc
$$\bigcap_{k=1}^{+\infty}(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = (X = 1)$$
Ainsi,
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1)}$$
De plus, $P(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(x)1^x}$ et
$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \prod_{k=1}^{n} P(\overline{(X \in p_k\mathbb{N}^*)}) && \text{par indépendance mutuelle} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) && \text{d'après 5}
\end{aligned}$$
Finalement,
$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)}$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

9) Passons par l'événement contraire : montrer qu'on appartient à un ensemble est ici plus facile que montrer la non appartenance.
$\bar{A}$ est l'événement « il existe un nombre premier qui divise X et Y simultanément ».
Soit $(a,b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \subset (\mathbb{N}^*)^2$. $\bar{A}$ s'écrit

$$\exists p \in \mathscr{P}, \qquad a \in p\mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad b \in p\mathbb{N}^*$$

Ensemblistement,

$$\bar{A} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ((X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*))$$

Donc en passant au complémentaire

$$\boxed{A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n}$$

La suite (C_n) est décroissante, donc par continuité décroissante,

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n)$$

Or les événements $\Big((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)\Big)_k$ sont mutuellement indépendant, de la même façon qu'à la question 7 :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(C_n) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*))\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} P\left((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) && \text{indépendance mutuelle} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - P((X \in p_k\mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k\mathbb{N}^*))\Big) && \text{complémentaire} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - P(X \in p_k\mathbb{N}^*)P(Y \in p_k\mathbb{N}^*)\Big) && \text{indépendance mutuelle} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{p_k^x}\right)\left(\frac{1}{p_k^x}\right)\right) && \text{question 5} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\right)
\end{aligned}$$

Donc, d'après 8, en passant à la limite,

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}}$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

10) On a

$$\begin{aligned}
A &= \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \overline{(X\in p\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p\mathbb{N}^*)}\\
&= \bigcap_{p\in\mathcal{P}} ((X\notin p\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p\mathbb{N}^*))\\
&= \bigcap_{i=1}^{+\infty} ((X\notin p_i\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_i\mathbb{N}^*)) && (\text{car } \mathcal{P}=\{p_i,\ i\in\mathbb{N}^*\})\\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{n} ((X\notin p_i\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_i\mathbb{N}^*))\right)\\
&= \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n.
\end{aligned}$$

donc, d'après la propriété de la continuité monotone, comme C_n forme une suite décroissante d'événements, on a :

$$P(A)=P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(C_n)=\lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))\right).$$

Or, on peut démontrer comme à la question 6 que les événements $((X\in p_k\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p_k\mathbb{N}^*))_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants (le résultat final sera au carré), donc leurs complémentaires, $((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))_{k\in 1,..,n}$ sont aussi indépendants, donc

$$\begin{aligned}
P(A) &= \lim_{n\to+\infty}P\left(\bigcap_{k=1}^{n}((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*))\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}P\left((X\notin p_k\mathbb{N}^*)\cup(Y\notin p_k\mathbb{N}^*)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-P\left((X\in p_k\mathbb{N}^*)\cap(Y\in p_k\mathbb{N}^*)\right)\right) && (\text{en passant au complémentaire})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-P(X\in p_k\mathbb{N}^*)P(Y\in p_k\mathbb{N}^*)\right) && (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes})\\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^x}\frac{1}{p_k^x}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^{2x}}\right)\\
&= \frac{1}{\zeta(2x)} && (\text{d'après la question 8 avec } 2x>1)
\end{aligned}$$

III.D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

10) D'après le troisième point des rappels d'arithmétique, pour tout $\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}
W_n(\omega)\in k\mathbb{N}^* &\Leftrightarrow k\mid U_n(\omega)\wedge V_n(\omega)\\
&\Leftrightarrow k\mid U_n(\omega) \text{ et } k\mid V_n(\omega)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(W_n\in k\mathbb{N}^*) &= P((U_n\in k\mathbb{N}^*)\cap(V_n\in k\mathbb{N}^*))\\
&= P(U_n\in k\mathbb{N}^*)P(V_n\in k\mathbb{N}^*) && (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes})\\
&= P(U_n\in k\mathbb{N}^*)^2 && (\text{même loi}).
\end{aligned}$$

Or, les entiers j de $[\![1,n]\!]$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap [\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leqslant ki \leqslant n \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant n/k \Leftrightarrow 1 \leqslant i \leqslant \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).
On a donc $\{j \in [\![1,n]\!] : k \mid j\} = \{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}$.
Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= P(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \\ &= \left(\frac{\operatorname{Card}\{ki,\ i \in [\![1, \lfloor n/k \rfloor]\!]\}}{\operatorname{Card}[\![1,n]\!]}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

11) • Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^{*2}$, $\lfloor n/k \rfloor \leqslant n/k$, donc $\dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
• Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \ell_k &= \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} P(W_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} P(W_n = k) && \text{(combinaison linéaire de limites finies)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) && \text{(événements incompatibles),} \end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$ comme limite d'une suite de probabilités.
• De plus, comme $W_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right)$$

et

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right) &\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n = k) && \text{(sous-additivité d'une probabilité)} \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) && \text{(car } (W_n = k) \subset (W_n \in k\mathbb{N}^*)) \\ &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 && \text{(d'après la question 10)} \\ &\leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} && \text{(d'après le premier point de cette réponse)} \end{aligned}$$

La convergence de la dernière série justifie à posteriori toutes les majorations précédentes
Or, $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ est une série convergente (Riemann et $2 > 1$), donc son reste tend vers 0, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $m \geqslant M$, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \varepsilon$.

Par suite, pour tout $m \geqslant M$, $P\left(\displaystyle\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} (W_n = k)\right) \leqslant \varepsilon$, donc

$$\sum_{k=1}^{m} \ell_k = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{m} (W_n = k)\right) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

En mettant bout à bout la majoration (valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$) et la minoration obtenues pour $\sum_{k=1}^{m} \ell_k$, on obtient bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1.$$

12) • La question 11 implique

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1 + \varepsilon,$$

et donc $\lim\limits_{m \to +\infty} \sum_{k=1}^{m} \ell_k = 1$.

Par suite, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$ converge et vaut 1.

• De plus, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0,1]$, donc

$$\ell_k = \lim_{n \to +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) \in [0,1].$$

• On a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell_k \geqslant 0$, donc $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

13) • Pour tout $n, k \in {\mathbb{N}^*}^2$,

$$n/k - 1 < \lfloor n/k \rfloor \leqslant n/k, \text{ donc } \frac{1}{k} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \frac{1}{k}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \frac{1}{k}$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

• On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n \to +\infty} P(W_n \in k\mathbb{N}^*) && \text{(propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} && \text{(d'après le premier point de cette réponse)} \\ &= P(X \in k\mathbb{N}^*) && \text{où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 5)} \end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, W et X suivent donc la même loi de probabilité.

• On a alors $\ell_1 = P(W = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(2) 1^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$.

Or, $P(W = k) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(W_n = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(U_n \wedge V_n = 1)$.

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $[\![1, n]\!]$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers $\frac{1}{\zeta(2)}$ (Culture : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

FIN DE L'ÉPREUVE