Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires entières positives ou nulles vérifiant, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } 0 \leqslant i < j \end{cases}$$

où α et λ sont des constantes fixés vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1) Quelle est la loi de X ?

2) Quelle est la loi de Y ?

3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4) On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.

5) Soit n un entier naturel. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(Y = j \mid Z = n)$. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?

6) On suppose que le nombre d'enfants d'une famille française est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 2,2. On admet que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $\dfrac{1}{2}$ et que les naissances successives sont indépendantes. Trouver la probabilité que cette famille ait i enfants dont j garçons.

Exercice 2 (Optimisation du choix d'une place de parking)

Présentation générale

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue.
Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s'intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l'arrivée.
Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres.
Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus).
On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est l'événement « la n-ième place est libre ».

Partie 1 (Loi de X)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $P(A_n)$.

2) Donner $X(\Omega)$. Pour tout $n \in X(\Omega)$, décrire $(X = n)$ à l'aide des $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

3) Déterminer, en justifiant, la loi de X.

4) Soit $Y = X - s + 1$. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p dont on donnera (sans les recalculer) l'espérance et la variance.

5) En déduire l'espérance et la variance de X.

Partie 2 (Calcul de la distance moyenne à l'arrivée)
On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie reviendra à choisir un numéro s compris entre 0 et d. Pour rappel, $s = 0$ correspond à chercher une place dès le début de la rue.
La distance à l'objectif est $|X - d|$, et l'espérance $D_s = E(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée.

6) Montrer que D_s existe.

7) Établir que $D_s = S_1 + S_2$ avec $S_1 = \sum_{n=s}^{d}(d-n)P(X=n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)P(X=n)$.

8) Soit $x \in]-1, 1[$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u_k = \sum_{i=0}^{k}(k-i)x^i$$

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = k + 1 + xu_k$.

9) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{k}{1-x} + \dfrac{x}{(1-x)^2}(x^k - 1)$

10) En déduire la valeur de S_1 en fonction de d, s et p (sans symbole somme).

11) Montrer que $E(X - d) = -S_1 + S_2$, et en déduire la valeur de S_2 puis que

$$D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$$

Partie 3 (Optimisation)
On cherche à minimiser D_s.

12) Simplifier $D_{s+1} - D_s$.

13) Étudier le signe de $D_{s+1} - D_s$. En déduire s pour que D_s soit minimale en fonction de d et p.

Exercice 3

Cet exercice étudie certaines questions liées à la fonction zêta, notée ζ, définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[, \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

Il utilise la fonction ζ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

Rappels d'arithmétique

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, on dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = ka$. On dit aussi que a est un diviseur de b, ou encore que b est multiple de a.
   Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi a divise b si et seulement si $b \in a\mathbb{N}^*$.
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b est l'entier naturel noté $a \wedge b$ tel que
   $$a \wedge b = \max\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\}.$$

3. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a \wedge b \Leftrightarrow n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b.$$

4. On dit qu'un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et p.
   Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
   On note $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.
5. Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $q_1, \dots, q_n$ sont des nombres premiers distincts, alors pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$(\forall i \in [\![1,n]\!], \quad q_i \text{ divise } a) \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} q_i \text{ divise } a.$$

6. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \geqslant 2$, il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que p divise a.

A - Loi zêta

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x.
Dans les questions suivantes de cette partie A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

3) Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x pour que X^k admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de ζ.

4) En déduire la variance de X.

5) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

B - Mutuelle indépendance

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x.
Soit enfin $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{P}^n$, un n-uplet de nombres premiers distincts.

6) Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*)$ et $(X \in q_2\mathbb{N}^*)$ sont indépendants.

7) Montrer que les événements $(X \in q_1\mathbb{N}^*), \dots, (X \in q_n\mathbb{N}^*)$ sont mutuellement indépendants.

Cela entraîne, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

8) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

C - Deux variables indépendantes suivant une loi zêta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} ((X \notin p_k\mathbb{N}^*) \cup (Y \notin p_k\mathbb{N}^*)).$$

9) Exprimer l'événement A à l'aide des événements C_n. En déduire que

$$P(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

D - Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note

$$W_n = U_n \wedge V_n$$

10) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$P(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(P(W_n = k))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k.

11) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \Rightarrow 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1.$$

12) En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 11, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $P(W \in B) = \lim_{n\to+\infty} P(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat. Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $P(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

13) Préciser la loi de W. En considérant ℓ_1, que peut-on alors en conclure ?

FIN DE L'ÉPREUVE