

## Épreuve de Mathématiques 7

Correction

### Exercice 1

#### Partie 1

- 1)
  - $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
  - $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
  - $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
- 2) Récurrence double : montrons que

$$\mathcal{H}_n : \deg T_n = n$$

est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

- $\mathcal{H}_0$  est vraie puisque  $T_0 = 1$  de degré 0.
- $\mathcal{H}_1$  est vraie puisque  $T_1 = X$  de degré 1.
- $\mathcal{H}_{n-1}\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$  : Supposons  $\mathcal{H}_n$  et  $\mathcal{H}_{n-1}$  vraies. Alors

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

Or  $\deg(XT_n) = n + 1$  et  $\deg(T_{n-1}) = n - 1$  d'après  $\mathcal{H}_n$  et  $\mathcal{H}_{n-1}$ .

Ainsi  $\deg(T_{n+1}) = n + 1$ . Par conséquent,  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

- **Conclusion** :  $\forall n \geq 1, \deg T_n = n$  et son coefficient dominant est  $a_n^{[n]} = 2^{n-1}$ .

*On a besoin des rangs  $n$  et  $n - 1$ , donc il faut initialiser avec  $\mathcal{H}_0$  et  $\mathcal{H}_1$ . On peut aussi mettre les rangs  $n$  et  $n - 1$  dans  $\mathcal{H}_n$ , en commençant donc à  $n = 1$ .*

- 3) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

- $\mathcal{H}_0$  est vraie car  $\cos(0) = 1$ .
- $\mathcal{H}_1$  est vraie car  $T_1 = X$ .
- $\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$  : Supposons  $n \geq 1$  et  $\mathcal{H}_n$  et  $\mathcal{H}_{n-1}$  vraies.  $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$  donc pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

- **Conclusion** :  $\forall n \geq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

- 4) Montrons que  $\langle ., . \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

- $\langle ., . \rangle$  est symétrique, par commutativité du produit sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi Q(\cos \theta) P(\cos \theta) d\theta = \langle Q, P \rangle$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall (P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}[X]^3 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \langle P_1 + \lambda P_2, Q \rangle &= \int_0^\pi (P_1 + \lambda P_2)(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi (P_1(\cos \theta) Q(\cos \theta) + \lambda P_2(\cos \theta) Q(\cos \theta)) d\theta \\ &= \int_0^\pi P_1(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta + \lambda \int_0^\pi P_2(\cos \theta) Q(\cos \theta) d\theta \\ &= \langle P_1, Q \rangle + \lambda \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

Donc  $\langle \cdot, Q \rangle$  est linéaire. La linéarité de  $\langle P, \cdot \rangle$  s'obtient par symétrie.

Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire.

- $\forall P \in \mathbb{R}[X], \langle P, P \rangle = \int_0^\pi (P(\cos \theta))^2 d\theta \geq 0$  comme intégrale d'une fonction positive.

Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est positive.

- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ , c'est-à-dire  $\int_0^\pi (P(\cos \theta))^2 d\theta = 0$ .

Or  $\theta \mapsto (P(\cos \theta))^2$  est une fonction continue et positive, donc son intégrale est nulle si et seulement si la fonction est nulle :

$$\forall \theta \in [0, \pi] \quad (P(\cos \theta))^2 = 0$$

Donc  $P(t) = 0$  pour tout  $t \in [-1, 1]$  ( $\cos \theta$  parcourt  $[-1, 1]$  lorsque  $\theta$  parcourt  $[0, \pi]$ ).

Or un polynôme ayant une infinité de racines (tous les réels de  $[0, 1]$ ) est le polynôme nul :  $P = 0$ .

Ainsi,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie positive.

En conclusion,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$

- 5) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , comme  $\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$ ,

$$e^{ia} \cos b = \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)}}{2}$$

et en passant à la partie réelle,

$$\Re(e^{ia} \cos b) = \Re(e^{ia}) \cos b = \cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

Conclusion :

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

- 6) Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels distincts. Donc  $n + m \neq 0$  et  $n - m \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m \rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos \theta) T_m(\cos \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta && \text{(d'après partie 1, 3)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta) d\theta && \text{(d'après partie 1, 5)} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \right]_0^\pi d\theta = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc libre.

D'après 1)2),  $T_k$  est de degré  $k$ . La famille  $\mathcal{B} = (T_0, \dots, T_n)$  est donc une famille libre de  $n+1$  vecteurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$  de dimension  $n+1$  : c'est une base<sup>1</sup>

De plus, elle est orthogonale d'après le calcul ci-dessus. Conclusion :

1. On peut aussi remarquer que c'est une famille de degrés échelonnés, donc une base.

$$(T_0, \dots, T_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]$$

7) Si  $n = 0$ ,  $\langle T_n, T_n \rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi$ . Sinon,

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_n \rangle &= \|T_n\|^2 = \int_0^\pi T_n(\cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2n\theta)) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \|T_0\|^2 = \pi \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle T_n, T_n \rangle = \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$$

8) Par définition d'une base

$$\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ il existe un unique } (n+1)\text{-uplet } (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$$

De plus  $\mathcal{B}$  est orthogonale donc  $\langle P, T_k \rangle = \alpha_k \|T_k\|^2$ , ce qui entraîne

$$\alpha_k = \frac{\langle P, T_k \rangle}{\|T_k\|^2}$$

9) Propriété utilisée : si  $p : E \rightarrow E$  est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie et de base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ .

Comme  $(T_0, \dots, T_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ , la projection orthogonale  $p : E \rightarrow E$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  s'écrit :

$$p(P) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle P, T_k \rangle}{\|T_k\|^2} T_k$$

(Ici, ce qui joue le rôle des  $e_i$  est  $\frac{T_k}{\|T_k\|}$ )

10) Si  $p : E \rightarrow E$  est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie, alors  $d(x, F) = \|p(x) - x\|$ . Ainsi,

$$d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|p(P) - P\|$$

## Partie 2

1)  $\Phi$  est linéaire par linéarité de la dérivation et distributivité du produit. De plus,

$$\deg(\Phi(P)) \leq \max(2 + \deg(P''), 1 + \deg(P')) = \deg P$$

Donc  $\Phi$  est à valeur dans  $\mathbb{R}_n[X]$  :  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$

2) Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (\sin(\theta) P'(\cos(\theta))) &= -\sin^2(\theta) P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta) P'(\cos(\theta)) \\ &= (\cos^2(\theta) - 1) P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta) P'(\cos(\theta)) \\ &= \Phi(P)(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Par conséquent, à l'aide de deux intégrations par partie (*toujours pareil : IPP ou changement de variable...*)

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi(P), Q \rangle &= \int_0^\pi \Phi(P)(\cos(\theta)) Q(\cos(\theta)) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) P'(\cos(\theta)) \right) Q(\cos(\theta)) d\theta \\
 &= \underbrace{\left[ \sin(\theta) P'(\cos(\theta)) Q(\cos(\theta)) \right]_0^\pi}_0 + \int_0^\pi \left( \sin(\theta) P'(\cos(\theta)) \right) \left( \sin(\theta) Q'(\cos(\theta)) \right) d\theta \\
 &= - \underbrace{\left[ P(\cos(\theta)) \sin(\theta) Q'(\cos(\theta)) \right]_0^\pi}_0 + \int_0^\pi P(\cos(\theta)) \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) Q'(\cos(\theta)) \right) d\theta \\
 &= \langle P, \Phi(Q) \rangle
 \end{aligned}$$

Donc  $\Phi$  est symétrique

L'endomorphisme  $\Phi$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}_n[X]$  est symétrique, donc, d'après le théorème spectral, diagonalisable.

- 3) D'après 2.2,  $\Phi(P)(\cos(\theta)) = -\frac{d^2}{d\theta^2} (P(\cos(\theta)))$ , or  $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$  d'après 1.3. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \Phi(T_k)(\cos(\theta)) &= -\frac{d^2}{d\theta^2} (T_k(\cos(\theta))) \\
 &= -\frac{d^2}{d\theta^2} (\cos(k\theta)) \\
 &= k^2 \cos(k\theta) \\
 &= k^2 T_k(\cos(\theta))
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\Phi(T_k)(x) = k^2 T_k(x)$ . Ainsi, le polynôme  $\Phi(T_k) - k^2 T_k$  a une infinité de racines (tout  $[-1, 1]$ ), donc c'est le polynôme nul :  $\Phi(T_k) = k^2 T_k$

Ainsi,  $T_k$  est un vecteur propre de  $\Phi$  pour la valeur propre  $k^2$ .

- 4) La famille  $(T_0, \dots, T_n)$  est une famille de vecteurs propres pour l'endomorphisme symétrique  $\Phi$  pour des valeurs propres deux à deux distinctes. Donc c'est une famille orthogonale.

## Exercice 2 (d'après INP TSI 2018)

- 1) a) *Comme toujours dans un exercice de probabilité, commence par identifier  $X(\Omega)$  (ici  $\{0, 1\}$ ), puis les événements (ici  $(X_1 = k)$  avec  $k \in X_1(\Omega)$ ), puis on applique la formule des probabilités totales (système complet d'événements :  $(Y = j)_{j \in Y(\Omega)}$  où  $Y = (X_2, X_3)$ ).*

- Loi  $X_1$  :  $X_1(\Omega) \subset \{0, 1\}$ . Donc  $X_1$  suit une loi de Bernoulli.

- Calcul de  $P(X_1 = 0)$  :  $\left( (X_2 = j) \cap (X_3 = k) \right)_{(j,k) \in \{0,1\}^2}$  est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned}
 (X_1 = 0) &= \bigcup_{(j,k) \in \{0,1\}^2} \left[ (X_1 = 0) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k) \right] \\
 &= (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) \\
 &\quad \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)
 \end{aligned}$$

Où les unions précédentes sont disjointes. Donc en passant aux probabilités, la formule des probabilités totales nous donne

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) \\
 &\quad + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \\
 &= 0 + 0 + 0 + p_1 \quad \text{(d'après l'énoncé)}
 \end{aligned}$$

$$\circ P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - p_1.$$

Conclusion :

$$\boxed{X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1 - p_1.}$$

- Loi  $X_2$  :  $X_2(\Omega) \subset \{0, 1\}$ . De même, par symétrie des rôles joués par  $i, j$  et  $k$  dans les formules,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_2 = 0, X_1 = 0, X_3 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 0, X_3 = 1) \\ &\quad + P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_3 = 0) + P(X_2 = 0, X_1 = 1, X_3 = 1) \\ &= p_2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{X_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1 - p_2.}$$

- Loi  $X_3$  : De même,

$$\boxed{X_3 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1 - p_3.}$$

$$\text{b) } E(X_1) = \sum_{k \in X_1(\Omega)} kP(X_1 = k) = P(X_1 = 1) = 1 - p_1.$$

$$\text{D'après le théorème du Transfert, } E(X_1^2) = \sum_{k \in X_1(\Omega)} k^2 P(X_1 = k) = P(X_1 = 1) = 1 - p_1, \text{ donc}$$

$$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = p_1(1 - p_1)$$

Ainsi,

$$\boxed{E(X_1) = 1 - p_1 \quad \text{et} \quad V(X_1) = p_1(1 - p_1)}$$

On retrouve les résultats du cours pour une loi de Bernoulli de paramètre  $p = 1 - p_1$ .

- c) Étudions l'événement  $(S = 2)$  : comme  $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ ,  $S = 2$  si et seulement si exactement 2 des  $X_i$  sont égaux à 1 :

$$(S = 2) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$$

Les unions étant disjointes,

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &= p_3 + p_2 + p_1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{par définition de } p_1, p_2 \text{ et } p_3)$$

Ainsi, la loi de  $S$  est  $P(S = 2) = 1$ , donc  $S = 2$  presque sûrement. Donc

$$\boxed{V(S) = 0}$$

- d) Par définition,  $\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$ .

Le théorème du transfert nous donne

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2) &= \sum_{(x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega)} x_1 x_2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= 1 \times 1 \times P(X_1 = 1, X_2 = 1) \end{aligned}$$

Car  $(1, 1)$  est le seul couple  $(x_1, x_2)$  tel que  $x_1 x_2 \neq 0$ .

D'autre part, d'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements  $(X_3 = k)_{k \in \{0,1\}}$ ,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \\ &= 0 + p_3 \end{aligned}$$

Donc

$$E(X_1 X_2) = p_3 = 1 - p_1 - p_2$$

Or  $E(X_1) = 1 - p_1$  (d'après b) et  $E(X_2) = 1 - p_2$  (de même). Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \\ &= 1 - p_1 - p_2 - (1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2) \\ &= -p_1 p_2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2}$$

e) D'après b, pour tout  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $\text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = p_i(1 - p_i)$ .

De plus, d'après d et par symétrie des rôles joués par les  $X_i$ , pour tout  $i \neq j$ ,  $\text{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$ .

Ainsi, comme  $K = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{i,j}$ ,

$$\boxed{K = \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix}}$$

f) Effectuons le produit matriciel :

$$\begin{aligned} Kx &= \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) - p_1 p_2 - p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 p_2(1 - p_2) - p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 - p_2 p_3 p_3(1 - p_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1 - p_2 - p_3) \\ p_2(-p_1 + 1 - p_2 - p_3) \\ p_3(-p_1 - p_2 + 1 - p_3) \end{pmatrix} \quad \text{Or } p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de la matrice } K \text{ associé la valeur propre } 0}$$

g)  $p_1 \in ]0, 1[$  donc  $p_1(1 - p_1) \neq 0$  : on peut l'utiliser comme pivot. Ainsi,

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow (1 - p_1)L_2 + p_2 L_1 \\ L_3 &\leftarrow (1 - p_1)L_3 + p_3 L_1 \end{aligned} \\ &\sim_L \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ 0 & p_3 p_2 & -p_2 p_3 \\ 0 & -p_2 p_3 & p_2 p_3 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow (1 - p_1)L_2 + p_2 L_1 \\ L_3 &\leftarrow (1 - p_1)L_3 + p_3 L_1 \end{aligned} \\ &\sim_L \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow 1/(p_2 p_3)L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\text{rg } K = 2}$ .

D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker } K = 3 - \text{rg } K = 1$ . De plus, d'après f,  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Ker } K$ .

Donc, par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\text{Ker } K = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

*Mathématiquement, vous pouvez aussi déterminer le noyau de façon classique par une résolution de système, puis en déduire le rang par le théorème du rang. L'énoncé suggérerait plutôt l'inverse.*

h) Expression de  $K$  en fonction de  $p$  : Comme  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ,  $p_1 = 1 - 2p$ .

$$K = \begin{pmatrix} (1-2p)2p & -(1-2p)p & -(1-2p)p \\ -(1-2p)p & p(1-p) & -p^2 \\ -(1-2p)p & -p^2 & p(1-p) \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 2-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & 1-p & -p \\ 2p-1 & -p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } pI_3 - K = p \left[ I_3 - \begin{pmatrix} 2-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & 1-p & -p \\ 2p-1 & -p & 1-p \end{pmatrix} \right] = -p \begin{pmatrix} 1-4p & 2p-1 & 2p-1 \\ 2p-1 & -p & -p \\ 2p-1 & -p & -p \end{pmatrix}$$

Comme les deux dernières colonnes sont identiques,  $pI_3 - K$  est de rang au plus 2. D'autre part, le rang était 1, toutes les colonnes devraient être proportionnelles, et donc

$$\det \begin{pmatrix} 1-4p & 2p-1 \\ 2p-1 & -p \end{pmatrix} = -p(1-4p) - (2p-1)^2 = -p + 4p^2 - (4p^2 - 4p + 1) = 3p - 1 = 0$$

Donc si  $p = 1/3$ ,  $\dim E_p = 2$ , et sinon  $\dim E_p = 1$ .

Conclusion :

$$\boxed{p \text{ est une valeur propre de } K \text{ et } \begin{cases} \dim E_p = 1 & \text{si } p \neq \frac{1}{3} \\ \dim E_p = 2 & \text{si } p = \frac{1}{3} \end{cases}}$$

i) Nous savons que la trace est la somme des valeurs propres, même complexes, avec multiplicité : sur  $\mathbb{C}$ ,  $K$  est trigonalisable donc

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), \exists T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad K = PTP^{-1} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Donc  $\text{Tr } K = \text{Tr } T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ .

*$K$  est symétrique réelle, donc diagonalisable : on a donc mieux – mais ça ne sert pas ici. Vous utilisez soit le résultat ci-dessus, soit le théorème spectral, au choix.*

Nous avons déjà deux valeurs propres distinctes,  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = p \neq 0$ . Ainsi

$$\text{Tr } K = p(2 - 4p + 2(1 - p)) = 2p(2 - 3p) = p + \lambda_3$$

Donc  $\lambda_3 = 3p(1 - 2p)$ . En conclusion,

$$\boxed{\text{Sp}(K) = \{0, p, 3p(1 - 2p)\}}$$

*Vérification : si  $p = 1/3$ , on retrouve bien  $p = 1/3 = 3p(1 - 2p)$  valeur propre double.*

2) Cas général.

a) La covariance est symétrique, donc

$K$  est une matrice symétrique

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable d'après le théorème spectral, donc

La matrice  $K$  est diagonalisable

b) Par bilinéarité de la covariance, comme  $W = \sum_{i=1}^3 x_i X_i$ ,

$$\begin{aligned} V(W) &= \text{Cov}(W, W) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^3 x_i X_i, \sum_{j=1}^3 x_j X_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

De plus la variance est positive, par positivité de l'espérance :  $V(W) = E((W - E(W))^2) \geq 0$ .  
Donc

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \text{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$$

c) Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\text{Posons } Y = AX : \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Par définition du produit matriciel,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Par définition du produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle X', Y \rangle = {}^t X' Y = \sum_{i=1}^n x'_i y_i$$

Donc en combinant

$${}^t X' A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x'_i a_{ij} x_j$$

La formule obtenue en b) s'écrit  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i k_{ij} x_j \geq 0$ . Ainsi, matriciellement, elle s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad {}^t x K x \geq 0$$



Soit  $x$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda : Kx = \lambda x$ , et  $x \neq 0$ . Ainsi,

$${}^t x K x = \lambda \|x\|^2 \geq 0$$

Or  $x \neq 0$  donc  $\|x\| \neq 0$ , par conséquent  $\lambda \geq 0$  :

Les valeurs propres de  $K$  sont positives ou nulles

*Même type de raisonnement que le DL5, ex1, partie 1, question 1)b)*

**Exercice 3 (PT 2016)** 1)  $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . Plus généralement, la loi de  $N$  est celle du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p \in ]0, 1[$  : c'est une loi géométrique.

$N$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les valeurs possibles de  $X$  sachant  $(N = n)$  sont  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

*On peut poser  $Y$  la variable aléatoire prenant la valeur de  $X$  sachant  $N = n$ . On vient de déterminer  $Y(\Omega)$ .*

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . L'événement  $(X = k)$  sachant  $(N = n)$  est « obtenir  $k$  pile parmi  $n$  lancers de pile ou face », il suit donc une loi binomiale :

La loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(N = n)$  est une loi binomiale de paramètres  $(n, p)$

*Toujours commencer par décrire les événements, et s'il y a un « parmi », comme dans « parmi  $n$  », ne serait-ce pas une loi binomiale :  $k$  succès parmi  $n$  essais.*

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$P(N = n, X = k) = P(N = n)P_{(N=n)}(X = k) \quad \text{Formule des probabilités conditionnelles.}$$

$$\begin{aligned} &= p(1-p)^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{D'après les lois déterminées au 1} \\ &= \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \end{aligned}$$

Si  $k > n$ ,  $P(N = n, X = k) = 0$  Loi du couple  $(N, X)$  :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad P(N = n, X = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} & \text{si } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \end{cases}$$

3) *Toujours le même modèle :  $X(\Omega)$ , formule des probabilités totales.  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ .*

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  s'écrit :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (X = k) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = k, N = n)$$

Puis, si  $k \in \mathbb{N}$  est fixé,

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k, N = n)$$

D'après 2),  $P(X = k, N = n) = 0$  si  $k > n$ , mais il faut aussi maintenir  $n \geq 1$  : si on commence la somme à  $n = k$ , il faut écarter le cas  $k = 0$ .

Si  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k, N = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} && \text{D'après 2 : } n \geq 1 \text{ et } k \leq n. \\
 &= p^{k+1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k} (1-p)^{k-1} \\
 &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \frac{1}{(1 - (1-p)^2)^{k+1}} && \text{D'après l'énoncé avec } x = (1-p)^2 \in ]-1, 1[. \\
 &= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}
 \end{aligned}$$

Si  $k = 0$  :

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0, N = n) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p (1-p)^{2n-1} && \text{D'après 2 : } n \geq 1 \text{ et } k = 0 \leq n. \\
 &= p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{2n+1} && \text{Les sommes, on les connaît en partant de 0} \\
 &= p(1-p) \sum_{n=0}^{+\infty} [(1-p)^2]^n \\
 &= p(1-p) \frac{1}{1 - (1-p)^2} && \text{Série géométrique, } x = (1-p)^2 \in ]-1, 1[. \\
 &= \frac{1-p}{2-p}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de  $X$  est donnée par

$$\boxed{\forall k \geq 1, P(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \quad \text{et} \quad P(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}}$$

*C'est le même exercice que les oeufs de batracien, mais au lieu de composer des lois de Poisson et binomiale, ici on compose des lois géométrique et binomiale.*

4) a) Les variables  $U$  et  $V$  sont indépendantes, donc

$$E(UV) = E(U)E(V)$$

Or  $E(U) = \lambda$  (loi de Bernoulli) et  $E(V) = \frac{1}{\lambda}$  (loi géométrique). Ainsi,

$$\boxed{E(Y) = 1}$$

b)  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ . Décrivons les événements  $(Y = k)$  :

- Pour  $k = 0$ ,  $(Y = 0) = (U = 0)$ , car  $V \neq 0$ .
- Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(Y = k) = (U = 1) \cap (V = k)$ , car  $U(\Omega) = \{0, 1\}$ .

*Si on veut procéder de façon systématique, on peut considérer les 2 systèmes complets d'événements qui s'offrent à nous :  $(U = i)_{i \in \{0,1\}}$  et  $(V = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Le plus simple est clairement le premier. Et  $(Y = k) \cap (U = i)$  se simplifie immédiatement.*

Par conséquent,

- Pour  $k = 0$ ,  $P(Y = 0) = P(U = 0) = 1 - \lambda$ .
- Pour  $k \geq 1$ ,  $P(Y = k) = P(U = 1)P(V = k)$  Car  $U$  et  $V$  sont indépendantes  
 $= \lambda\lambda(1 - \lambda)^{k-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X = 0) = 1 - \lambda \\ P(X = k) = \lambda^2(1 - \lambda)^{k-1} \quad \text{si } k \geq 1 \end{array}}$$

c) La formule de König-Huygens s'écrit  $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ . Le théorème du transfert nous dit

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2 P(Y = y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(Y = k) && \text{Car } k^2 P(Y = k) = 0 \text{ si } k = 0 \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \lambda^2 (1 - \lambda)^{k-1} \end{aligned}$$

*On reconnaît un bout de dérivation ( $kx^{k-1}$ ) et de la série géométrique. On bricole au brouillon, et on revient au propre avec un beau calcul bien net.*

La série géométrique a pour rayon de convergence 1 :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Or par dérivation terme à terme de cette série entière à l'intérieur du domaine de convergence, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \\ \forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{2}{(1-x)^3} &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1}$$

En remplaçant dans  $E(Y^2)$  il vient

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 (1 - \lambda)^{k-1} && \text{avec } 1 - \lambda \in ]-1, 1[ \\ &= \frac{\lambda^2(1 + 1 - \lambda)}{\lambda^3} \\ &= \frac{2 - \lambda}{\lambda} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{V(Y) = \frac{2}{\lambda}}$$

5) Déterminons  $\lambda$  à l'aide de  $P(X = 0)$  :

$$\frac{1-p}{2-p} = 1 - \lambda \iff \lambda = \frac{1}{2-p}$$

Donc en posant  $\lambda = \frac{1}{2-p}$  et donc  $1 - \lambda = \frac{1-p}{2-p}$ ,  $X$  a pour loi d'après 3)

$$\forall k \geq 1, P(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} = \lambda^2 (1-\lambda)^{k-1} \quad \text{et} \quad P(X = 0) = \frac{1-p}{2-p} = 1 - \lambda$$

D'après 4)b),  $X$  a même loi que  $Y = UV$ , c'est-à-dire

$X$  a même loi qu'un produit de variables aléatoires indépendantes  $UV$  où  $U \hookrightarrow \mathcal{B}(\lambda)$  et  $V \hookrightarrow \mathcal{G}(\lambda)$

**FIN DE L'ÉPREUVE**