Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.
Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

On considère enfin l'application φ de E^2 vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Partie 1 **1)** Calculer T_2, T_3 et T_4.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

4) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

5) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle .,. \rangle$.

7) Calculer $\langle T_n, T_n \rangle$ pour $n \in \mathbb{N}$. La base précédente est-elle orthonormée ?

8) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$$

On exprimera α_k à l'aide de T_k et de P.

9) Exprimer la projection orthogonale $p(P)$ d'un polynôme $P \in E$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ à l'aide de $(T_0, \dots, T_n)$.

10) Pour $P \in E$, exprimer $d(P, \mathbb{R}_n[X])$.

Partie 2

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = (X^2-1)P'' + XP'$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) À l'aide du calcul de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(\theta)P'(\cos(\theta))\Big)$, montrer que Φ est symétrique. Φ est-il diagonalisable ?

3) Calculer $\Phi(T_k)$ à l'aide de la formule obtenue en 1.3. Que représente T_k pour Φ ?

4) En déduire (de nouveau) que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale.

Exercice 2

On note $\mathscr{V}_d^2$ l'ensemble des variable aléatoire discrète réelles X définies sur un espace probabilisé Ω muni d'une probabilité P, telle que $E(X^2)$ existe.
D'après le cours, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si $X \in \mathscr{V}_d^2$, alors X admet une variance. Si $X, Y \in \mathscr{V}_d^2$, alors $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$ existe.
Soient $X_1, X_2, X_3 \in \mathscr{V}_d^2$, on définit K, la matrice de covariance des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3, comme la matrice carrée d'ordre 3 avec $K = (k_{ij})$ où pour tout $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, $k_{ij} = \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$.

1) Étude d'une exemple.
On suppose uniquement dans cette partie, que les trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ et qu'elles vérifient les conditions suivantes : il existe $p_1, p_2, p_3 \in]0, 1[$ tels que $p_1+p_2+p_3 = 1$ et

$$P\Big[(X_1 = i) \cap (X_2 = j) \cap (X_3 = k)\Big] = \begin{cases} p_1 & \text{si } i = 0, j = k = 1, \\ p_2 & \text{si } j = 0, i = k = 1, \\ p_3 & \text{si } k = 0, i = j = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3.

b) Calculer les espérance et variance de X_1.

c) On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $P(S = 2)$, et en déduire la variance de S.

d) Montrer que $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) = -p_1 p_2$.

e) Vérifier que

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 \\ -p_1p_3 & -p_2p_3 & p_3(1-p_3) \end{pmatrix}$$

f) Montrer que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice K associé à une valeur propre que l'on précisera.

g) Déterminer le rang de K et son noyau.

h) On suppose de plus que $p_2 = p_3 = p$. Exprimer K uniquement en fonction de p, puis montrer que p est une valeur propre de K et préciser la dimension de l'espace propre associé.

i) Toujours dans le cas où $p_2 = p_3 = p$, et en utilisant la trace de K, déterminer toutes les valeurs propres de K.

2) Cas général.

a) Montrer que K est une matrice symétrique. La matrice K est-elle diagonalisable ?

b) En calculant la variance de la variable aléatoire $W = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3$, montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j \,\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) \geqslant 0$$

c) Montrer que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad {}^t x K x \geqslant 0$$

En déduire que les valeurs propres de K sont positives ou nulles.

Exercice 3

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1) Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$.

2) Déterminer la loi du couple (N, X).

3) On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall x \in]-1,1[: f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Donner l'expression de la dérivée $k^{ième}$ de f pour tout $k \geqslant 0$.
En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.

4) On admet que la série de fonctions $\sum_n \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge simplement sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

En déduire que la loi de X est donnée par

$$\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}.$$

5) Soit $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.

a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).

c) Calculer la variance de Y.

6) En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

FIN DE L'ÉPREUVE