Épreuve de Mathématiques 7

$\boxed{\text{Correction}}$

Exercice 1 (E3A PC 2017 — UPS)

1) a) Convergence : Soit

$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad u_j = j(j-1)P(X=j)$$

Pour $j \geqslant 2$, $u_j = \dfrac{\lambda^j}{(j-2)!}e^{-\lambda} = \left[\lambda^2 e^{-\lambda}\right] \dfrac{\lambda^{j-2}}{(j-2)!}$.

Or $\sum\limits_n \dfrac{\lambda^n}{n!}$ est absolument convergente (série exponentielle), donc, en multipliant par $\lambda^2 e^{-\lambda}$, $\sum\limits_j u_j$ l'est aussi.

Calcul : La série $\sum j(j-1)P(X=j)$ converge absolument d'après ci-dessus, donc le théorème de transfert affirme que l'espérance $E(X(X-1))$ existe et

$$E(X(X-1)) = \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)P(X=j) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-2)!}e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2.$$

b) La linéarité de l'espérance permet d'écrire $E\left(X^2\right) = E(X(X-1)+X) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda$.

2) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$i^2 P(X \geqslant i) = i^2 \sum_{j=i}^{+\infty} P(X=j) \leqslant \sum_{j=i}^{+\infty} j^2 P(X=j) \leqslant E(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

D'où : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P\left(X \geqslant i\right) \leqslant \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{i^2}$ converge, il en est de même pour la série $\sum P\left(X \geqslant i\right)$.

3) a) On a $\lim\limits_{i\to+\infty} \dfrac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = 0 < 1$. Ainsi la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} u_{i,k}$, à termes réels strictement positifs, converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par la règle de D'Alembert.

b) On a $0 \leqslant u_{i,k} \leqslant \left(\dfrac{\lambda}{k}\right)^i$. Ainsi, pour $k > \lambda$ on a $0 < \dfrac{\lambda}{k} < 1$ et la série géométrique de raison $\dfrac{\lambda}{k}$ converge. D'où pour toute constante $K \geqslant \lambda$ et pour tout entier $k \geqslant K$, on a : $R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k} \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$.

4) a) Soit un entier k tel que $k > \lambda$. On a :

$$P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X=i) = \left(1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} u_{i-k,k}\right) P(X=k) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i P(X=k) = \frac{k}{k-\lambda} P(X=k).$$

Si on a de plus $k \geqslant 2\lambda$, alors :

$$P(X > k) = P(X \geqslant k) - P(x=k) \leqslant \left(\frac{k}{k-\lambda} - 1\right) P(X=k) \leqslant P(X=k).$$

b) Comme $k \geqslant 1 \geqslant 2\lambda$, on a :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} P(X \geqslant i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j) = P(\Omega) = 1.$$

c) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le cas général, on a $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geqslant i)$. Reprendre la preuve du cours.

5) **a)** Une étude des variations de la fonction réelle définie par $f(t) = e^{-t} + t - 1$ montre qu'elle est à valeurs positives. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leqslant e^{-t}$.

b) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \leqslant \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1} i} = \frac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)}.$$

c) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a : $P(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \leqslant \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)} e^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)}$.

d) Soit $k \geqslant 2\lambda + 1$. Alors $\beta(n,k,\lambda) \leqslant 0$ et par suite $P(Y = k) \leqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = P(X = k)$.

e) Soit $k \geqslant 2\lambda + 1$. On a : $\sum_{j=k+1}^{n} P(Y = j) \leqslant \sum_{j=k+1}^{n} P(X = j) \leqslant P(X > k) \leqslant P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2 (E3A PC 2016 — corrigé UPS)

A

1) $\forall x \in]-1, 1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le Rayon de convergence est 1.

2) $Sp(M) = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\ ,\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right\}$.

Comme $2 < \sqrt{5} < 3, \quad 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ et $-1 < \frac{-1}{2} < \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$.

M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathrm{d}r)$ admettant 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = MX_n$. Par récurrence facile, on montrerait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0$.

D'autre part, comme M est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathrm{d}r)$ telle que $M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

En effectuant les produits matriciels, on en déduit l'existence de réels A et B tels que
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Il est plus rapide d'utiliser les résultats connus pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique admet 2 racines distinctes α et β mais ce n'est pas la direction suggérée par le texte ..

b) Pour $n = 0, \quad 4 = u_0 = A + B$ et pour $n = 1, \quad 3 = u_1 = A\alpha + B\beta$.

On a donc aussi $4\beta = A\beta + B\beta$ et $4\alpha = A\alpha + B\alpha$.

En ajoutant : $A\beta + B\alpha + \underbrace{B\beta + A\alpha}_{=3} = 4\underbrace{(\alpha + \beta)}_{=1/2}$ d'où $A\beta + B\alpha = -1$.

c) Comme α et β sont dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$, les séries $\sum \alpha^n$ et $\sum \beta^n$ sont convergentes et par opérations sur les séries convergentes $\sum u_n$ converge.

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{B}{1-\beta}$.

En utilisant les égalités précédentes et les égalités $\alpha+\beta = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha\beta = \dfrac{-1}{4}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 20$.

```python
def suite(N):
    L = [4, 3]
    for n in range(N-1):
        L.append(L[-1]/2 + L[-2]/4)
    return L[:N+1]   #On tronque dans le cas N=0
```

4)

```python
def suite_rec(N):
    if N <= 1:
        return [4, 3][:N+1]   #On tronque dans le cas N=0
    L = suite_rec(N-1)
    return L + [L[-1]/2 + L[-2]/4]
```

Si on appelle $C(N)$ le nombre d'opérations nécéssaires, on a $C(0) = 0$ et $C(N) = 3(N-1)$ si $N \geq 1$ puisque pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ on effectue 1 addition et 2 divisions.

B

1) Un joueur ne peut gagner qu'à partir du 3ème tour donc
$P(E_1) = 1, \quad P(E_2) = 1, \quad P(A_1) = 0, \quad P(A_2) = 0, \quad P(B_1) = 0, \quad P(B_2) = 0$
$P(A_3 = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3) = 0) = p^2 q$ car les (X_i) sont indépendantes.
De même $P(B_3) = qp^2$.
Comme les joueurs ne peuvent pas gagner avant le 3ème tour, $E_3 = \overline{A_3 \cup B_3}$.
On a $P(E_3) = 1 - P(A_3 \cup B_3) = 1 - P(A_3) - P(B_3)$ car A_3 et B_3 sont incompatibles d'où $P(E_3) = 1 - 2p^2 q$.

2) L'évenement $E_n \cap (X_n = x_0)$ ne dépend que des variables X_i pour $1 \leq i \leq n$ et l'évenement $(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})$ ne dépend que des variables X_i pour $n+1 \leq i \leq n+k$.
Comme les variables $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, ces deux évenements sont indépendants.
On en déduit que
$P(E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})) = P(E_n \cap (X_n = x_0))\, P((X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k}))$.

3) **a)** $v_1 = P(E_1 \cap (X_1 = 0)) = P(X_1 = 0) = q, \quad w_1 = P(E_1 \cap (X_1 = 1)) = P(X_1 = 1) = p$ car $P(E_1) = 1$
De même $v_2 = q$ et $w_2 = p$.

b) $E_n \cap (X_n = 0) = E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0) \bigcup E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$.
Comme il s'agit d'une union d'évenements incompatibles,
$P(E_n \cap (X_n = 0)) = P(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) + P(E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0))$.
Si $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$ le dernier motif est PFF ou FFF et aucun des joueurs ne gagne au nième tour, donc
$P(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = P(E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = v_{n-1} P(X_n = 0) = q v_{n-1}$ d'après 6 .
$E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = (E_n \cap (X_{n-2} = 0) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) \bigcup (E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} =$
$E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = \emptyset$ car le dernier motif est alors PPF et Alice gagne au rang n

Si $X_{n-2} = 0$ et $(X_{n-1} = 1$ et $(X_n = 0)$, le dernier motif est FPF et aucun des joueurs ne peut gagner aux rangs n et $n-1$.
On en déduit que $E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$
En utilisant de nouveau le résultat de 6,
$P(E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) = P(E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) = P(E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) = v_{n-2}pq$
Finalement,

$$\forall n \geq 3, \quad v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

c) Comme $X_n = 1$, on a $k \leq n-1$.
Supposons $k \leq n-2$, on a alors $k+1 \leq n$, $k+2 \leq n$, $X_k = 0$, $X_{k+1} = 1$, $X_{k+2} = 1$: Benoit gagne au rang $k+2 \leq n$, c'est absurde donc $k = n-1$.

d) D'après ce qui précède, $E_n \cap (X_n = 1) = \left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) \bigcup (E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1))$
Comme il s'agit d'une union disjointe,
$w_n = P(E_n \cap (X_n = 1)) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) + P((E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)))$
Les X_i étant mutuellement indépendantes, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) = p^n$.
D'autre part $E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1) = E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)$ et
$P(E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)) = v_{n-1}p$ d'après 6.
Finalement $\forall n \geq 3, \quad w_n = p^n + pv_{n-1}$.

4) **a)** **i)** $(T > n) = E_n$.

ii) d'après la formule des probabilités totales,
$P(T > n) = P(E_n) = P(E_n \cap (X_n = 0)) + P(E_n \cap (X_n = 1)) = v_n + w_n = v_n + p^n + pv_{n-1}$.

iii) Les évenements $(T > n)_{n \geq 2}$ forment une suite décroissante , donc par continuité monotone décroissante, $P(T = \infty) = P(\bigcap_{n=2}^{+\infty} (T > n)) = \lim_{n \to +\infty} P(T > n)$
Comme $0 < p < 1$, $\lim_{n \to +\infty} p^n = 0$, on a donc $P(T = \infty) = \lim_{n \to +\infty} v_n + pv_{n-1}$.
Soit $a_n = v_n + pv_{n-1} = \dfrac{v_{n+1}}{q}$. Cette suite est convergente de limite $P(T = \infty)$, on en déduit que la suite (v_n) est convergente de limite $\ell = qP(T = \infty)$.
En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par (v_n) on a $\ell = (q + pq)\ell$ soit $p^2\ell = 0$ d'où $\ell = 0$ car $p > 0$
On en déduit que $P(T = \infty) = \dfrac{\ell}{q} = 0$.

iv) Avec une probabilité égale à 1, l'un des joueurs gagne la partie.

b) Comme $\sum v_n$ converge et que $\sum p^n$ converge car $0 < p < 1$, la série $\sum P(T > n)$ converge.
Comme T est à valeurs positives montrer que T est d'espérance finie revient à montrer la convergence de la suite croissante (S_n) où pour $n \geq 3$, $\quad S_n = \sum_{k=3}^{n} kP(T = k)$.

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} k\left(P(T > k-1) - P(T > k)\right) = \sum_{k=2}^{n-1} (k+1)P(T > k) - \sum_{k=3}^{n} kP(T > k)$$

$$S_n = 3P(T > 2) + \sum_{k=3}^{n-1} P(T > k) - nP(T > n)$$

On en déduit que $S_n \leq 3P(T > 2) + \sum_{k=3}^{n-1} P(T > k) \leq 3P(T > 2) + \sum_{k=3}^{+\infty} P(T > k)$.

La suite (S_n) est une suite croissante majorée donc convergente et T est d'espérance finie.

D'après un résultat de cours, on sait alors que $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(T \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n) = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} P(T > n)$ car $P(T > 0) = P(T > 1) = 1$.

On a donc $E(T) = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n + \sum_{n=2}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} = 2 + pq + \frac{p^2}{1-p} + (1+p)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n\right)$.

c) Si $p = q = \frac{1}{2}$, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence de la partie A mais avec les conditions initiales $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}$ et $v_3 = \frac{3}{8}$.
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n = 8v_{n+2}$, la suite (u_n) est la suite étudiée dans la partie A. On en déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+2} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{5}{2}$.
D'où
$$E(T) = \frac{13}{2}$$

5) **a)** Si Alice gagne au nième lancer (év'nement A_n), le dernier motif est PPF. D'autre part comme $A_n \subset E_{n-1}$, on a $A_n \subset E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_{n-2}) = 1)$. D'après la question 7.b, si au cours des n-1 premiers lancers, la pièce était tombée sur Face, on aurait $X_{n-2} = 0$. On a donc $A_n \subset (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$

b) On en déduit par double inclusion que $A_n = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$ puis $P(A_n) = p^{n-1}q$.
$B_n = (E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 1)$.
Donc $P(B_n) = p^2 P(E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) = p^2 v_{n-2}$

6) Notons $A = \bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n$, l'événement "Alice gagne" et $B = \bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n$, l'évenement "Benoit gagne".
Comme $P(T = \infty) = 0$ (8.a), $P(A) + P(B) = 1$.

D'autre part, les évenements (A_n) étant 2 à 2 incompatibles, $P(A) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q = p^2$.

On en déduit $P(B) = 1 - p^2$

Si la pièce est équilibrée, $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$. (Paradoxe de Penney).

7) Le jeu est équitable si $p^2 = 1 - p^2$, soit $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 3 (E3A MP 2017)

Il s'agit de l'étude d'une marche aléatoire, objet d'étude classique en probabilités, et donc classique dans les sujets de concours.

1) Voici les deux fonctions.

```python
def deplacement(L, a, b):
    if L == "N":
        return (a+1, b)
    if L == "E":
        return (a, b+1)


def chemin(m):
    a, b = (0, 0)
    L = [(a, b)]
    for car in m:
        a, b = deplacement(car, a, b)
        L.append((a, b))
    return L
```

2) **a)** Il y a 2^ℓ trajets comportant exactement ℓ étapes.

b) *Si vous énumérez, soyez systématique — rangez les trajets dans un ordre logique, pour ne pas en oublier.*

Le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de placement différents possibles de 2 « N » dans une chaîne de 5 caractères, donc

$$\boxed{\binom{5}{2} = 10}$$

c) Le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées (a,b) est égal au nombre de placement différents possibles de a « E » dans une chaîne de $a+b$ caractères, donc

$$\boxed{\binom{a+b}{a}}$$

Testez votre résultat pour a et b petits, par exemple avec la question précédente.

3) **a)** Comme $U_1 = (E_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap E_2)$, et que cette union est disjointe,

$$\boxed{P(U_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

b) Il y a le même nombre de chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) que de chemins reliant le point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(c-a,d-b)$, calculé en 2)c) :

$$\text{Card } C_{(a,b)}^{(c,d)} = \text{Card } C_{(0,0)}^{(c-a,d-b)} = \binom{c+d-(a+b)}{c-a}$$

Donc

$$\boxed{C_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \binom{2n-2}{n-1}}$$

c) Notons $\overline{T}_{(a,b)}^{(c,d)} = C_{(a,b)}^{(c,d)} - T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) à celui de coordonnées (c,d) et coupant la droite d'équation $y=x$.

D'après l'énoncé, Card $\overline{T}_{(a,b)}^{(c,d)} =$ Card $C_{(b,a)}^{(c,d)}$ dans le cas qui nous intéresse – c'est-à-dire (a,b) et (c,d) dans le même ordre, i.e. du même coté de la droite $y=x$. *(C'est le principe de réflexion).*

Donc ici, avec $(a,b) = (0,1)$ et $(c,d) = (n-1,n)$,

$$\boxed{\text{Card } \overline{T}_{(0,1)}^{(n-1,n)}} = \text{Card } C_{(1,0)}^{(n-1,n)} = \text{Card } C_{(0,0)}^{(n-2,n)} \boxed{= \binom{2n-2}{n}}$$

d) Par définition,

$$T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \overline{T}_{(0,1)}^{(n-1,n)} - C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$$

Donc, d'après 3)b) et 3)c),

$$\begin{aligned}
\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)} &= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-1)!}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$

e) Par symétrie du problème, la transformation $(x, y) \mapsto (y, x)$ est une bijection qui envoie $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ sur $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$. Donc

$$\boxed{\text{Card } T_{(1,0)}^{(n,n-1)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$$

f) *Toujours commencer par les événements.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. L'événement U_n se décompose en $U_n = (U_n \cap E_1) \cup (U_n \cap N_1)$, où l'union est disjointe ((E_1, N_1) est un système complet d'événements).

De plus $U_n \cap E_1 = U_n \cap E_1 \cap N_n$: pour arriver en (n, n) en étant parti vers l'est, sans couper $y = x$, le dernier mouvement est nécessairement vers le nord : la droite $y = x$ reste au nord pendant tout le trajet.

L'ensemble des trajets satisfaisant $U_n \cap E_1 \cap N_n$ est en bijection avec $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$. Donc d'après 2)a) et 3)d),

$$P(U_n \cap E_1 \cap N_n) = \frac{\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

De même, $U_n \cap N_1 = U_n \cap N_1 \cap E_n$ et $P(U_n \cap N_1 \cap E_n) = P(U_n \cap E_1 \cap N_n)$, donc

$$\boxed{P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$$

De plus, $(2n-2)! = \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)(2k)$ et $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, donc

$$\begin{aligned}
P(U_n) &= \frac{(2n-2)!}{\Big[(2^n)n!\Big]\Big[(2^{n-1})(n-1)!\Big]} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^{n} 2k \prod_{k=1}^{n-1} 2k} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}}$$

Vous auriez pu passer de la première à la seconde formule en écrivant tout au brouillon avec des pointillés, puis en prenant le temps de traduire par des produit $\prod_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$.

4) **a)** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(2n)!2^{2n-1}n!(n-1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!(2n-2)!} = \dfrac{2n(2n-1)}{2^2 n(n+1)} = \dfrac{2n-1}{2n+2} = \dfrac{2n+2-3}{2n+2} = 1 - \dfrac{3}{2n+2}$

Donc, comme $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = -x + O(x^2)$,

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2n+2}\right) = -\frac{3}{2n+2} + O(\frac{1}{n^2})$$

Par conséquent $a = -\dfrac{3}{2}$ et

$$\boxed{\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

À partir du moment où vous connaissez vos DL usuels et prenez votre temps, cette question ne présente aucune difficulté.

b) *Exercice classique : exercice 3, feuille sur les séries numériques.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue, décroissante sur $[1, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [n, n+1], && \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n} \\
\Longrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}^*, && \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \quad \text{Par croissance de l'intégrale.} \\
\Longrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}^*, && \frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} \\
\Longrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}^*, && \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqslant -u_n \leqslant 0 \\
\Longrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}^*, && 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$, et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison et majoration, $\sum u_n$ converge. Notons $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Il vient,

$$\sum_{n=1}^{N-1} u_n = \gamma + o(1)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} u_n = \sum_{n=1}^{N-1} \Big(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big) = \Big(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}\Big) - \int_1^N \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}\Big) - \ln N$. D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1)}$$

c) Soit $N \geqslant 2$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \Big(\ln v_{n+1} - \ln v_n\Big) = \ln v_N - \ln v_1$$

De plus $v_1 = P(U_1) = \dfrac{1}{2}$ d'après 3)a).
D'autre part, d'après 4)a), il existe une suite (w_n) telle que

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = -\frac{3/2}{n} + w_n \qquad \text{ou} \qquad w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Toujours donner des noms avant de sommer : on ne somme pas (jusqu'à N) des o et des O.

Par comparaison, la série $\sum w_n$ converge, notons $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$. Il vient,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) &= -\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{N-1} w_n \\ &= -\frac{3}{2}(\ln(N) + \gamma + o(1)) + W + o(1) && \text{D'après 4)b)}\end{aligned}$$

Donc $\ln v_N = -3/2 \ln N + \Big[-3/2\gamma + W - \ln 2\Big] + o(1)$. Notons $K = -3/2\gamma + W - \ln 2$. En passant à l'exponentielle et en effectuant un développement limité de $e^{o(1)}$, nous obtenons

$$v_N = e^{-3/2\ln N} e^K e^{o(1)} = \frac{e^K}{N^{\frac{3}{2}}}(1 + o(1))$$

Par conséquent, avec $k = e^K > 0$,

$$\boxed{v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}}$$

d) *La première partie de la question ne dépend que du résultat – donné – de la question 3)f).*

$$\begin{aligned}(2n-1)v_n - (2n+2)v_{n+1} &= (2n-1)\frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} - 2(n+1)\frac{1}{2^{2n+1}} \times \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\left[2(2n-1) - \frac{(n+1)2n(2n-1)}{(n+1)n}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \qquad v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}}$$

Ainsi, pour tout $N \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} v_{n+1} = \sum_{n=2}^{N}\Big[(2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}\Big]$ Par

$$= 3v_2 - (2N+1)v_{N+1} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

conséquent, comme $(2N+1)v_N \sim 2N\dfrac{k}{N^{3/2}} = \dfrac{2k}{\sqrt{N}}$, $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} v_n = 3v_2$. Puis,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = v_1 + 4v_2 = \frac{1}{2} + 4\frac{1}{2\times 4} = 1$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1}$.

Les U_n sont deux à deux disjoints, donc

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} U_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n) = 1$$

Ainsi, une marche aléatoire rencontre presque sûrement la droite $y = x$.

FIN DE L'ÉPREUVE