Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P(X = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$.

1) **a)** Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

b) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$.

2) Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant i) \leqslant \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geqslant i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

3) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

a) Montrer que la série $\sum\limits_{i\geqslant 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

<u>Indication</u> : *Pour les 3/2 : On pourra écrire u_{ik} à l'aide de factorielles.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geqslant K$, on a : $R_{n,k} \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$.

4) **a)** Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P(X \geqslant k) \leqslant \dfrac{k}{k-\lambda}P(X = k)$.

Puis montrer que pour tout entier $k \geqslant 2\lambda$, $P(X > k) \leqslant P(X = k)$.

b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum\limits_{i=2}^{+\infty} P(X \geqslant i) \leqslant 1$.

c) Dans le cas général, que vaut $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X \geqslant i)$? Le justifier.

5) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leqslant e^{-t}$.

b) Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n, k) = \frac{(k-1)k}{2n}$.

c) Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ P(Y = k) \leqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n, k, \lambda) = \frac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.

d) Quelle majoration de $P(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$?

e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2\lambda + 1$: $\sum_{j=k+1}^{n} P(Y = j) \leqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

Exercice 2

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$, et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) Rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, pour $x \in]-1, 1[$ fixé.

2) Calculer les valeurs propres de M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3) On note α et β les valeurs propres de la matrice M.

a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$

b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

i) $A + B = 4$

ii) $A\alpha + B\beta = 3$

iii) $A\beta + B\alpha = -1$

c) Démontrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$.

d) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

4) Proposer une fonction en python, `suite(N)`, qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N + 1$ premiers termes de la suite (u_n) sous forme de nombres flottants. Préciser la complexité en temps de votre algorithme.

Partie B

On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par motif le résultat de trois lancers successifs.

Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur « face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.
Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers », A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5) Déterminer $P(E_n)$, $P(A_n)$, $P(B_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

6) Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, \dots, x_k)$ dans $\{0,1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap \dots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'évènement :

$$E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap \dots \cap (X_{n+k} = x_k)$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$v_n = P\Big(E_n \cap (X_n = 0)\Big) \qquad \text{et} \qquad w_n = P\Big(E_n \cap (X_n = 1)\Big)$$

a) Exprimer v_1, v_2, w_1 et w_2 en fonction de p et q.

b) Soit n un entier naturel $\geqslant 3$. En décomposant l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que

$$v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

c) Soit n un entier naturel $\geqslant 3$. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1).
On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

d) Soit n un entier naturel $\geqslant 3$. Démontrer que

$$w_n = p^n + pv_{n-1}$$

8) Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape », pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

a) Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.

i) Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

ii) En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

iii) Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
Indication : *On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geqslant 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.*

iv) Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

b) Si la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie.
En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$$

c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \dfrac{1}{2}$.
Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
Indication : *On pourra calculer v_2 et v_3.*

9) Soit n un entier naturel $\geqslant 3$.

a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer, soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10) Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

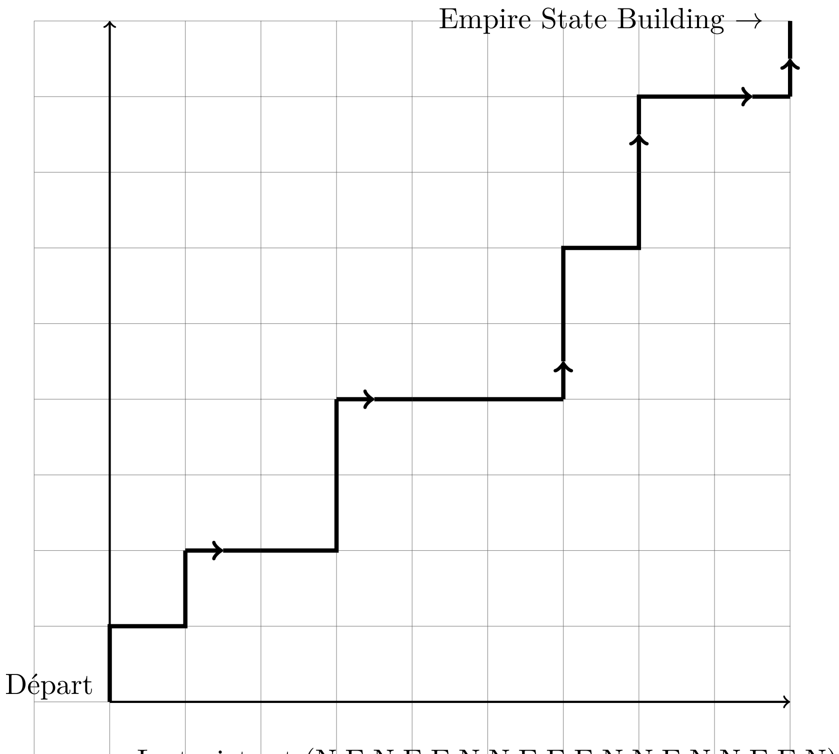
11) Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 3

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.
À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
A chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \ldots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x reprśente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :
$x_0 = y_0 = 0$
pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



Le trajet est (N,E,N,E,E,N,N,E,E,E,N,N,E,N,N,E,E,N)

1) **a)** Écrire en langage Python une fonction `deplacement(L,a,b)` dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L = "N"$ et $(a+1, b)$ si $L = "E"$.

b) Écrire une fonction `chemin(m)` où m est une chaîne constituée des caractères "N" et "E" et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) **a)** En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a,b) avec $(a,b) \neq (0,0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$". On pourra noter N_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord" et E_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est".

a) Calculer la probabilité de l'événement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n,n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$$

puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

FIN DE L'ÉPREUVE