

Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2022)

1) Soit A et B deux événements, avec $\mathbb{P}(A) > 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}$$

2) D'après l'énoncé, $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$$

3) L'événement $[X = 1]$ est : « le dernier saut réussi par le sauteur est le premier ». Donc il a réussi le premier et échoué au second : $[X = 1] = S_1 \cap \overline{S_2}$. Comme le premier saut est toujours réussi,

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(\overline{S_2}) = \frac{1}{2}}$$

4) De même, l'événement $[X = 2]$ est : « le dernier saut réussi par le sauteur est le deuxième ». Donc il a réussi le deuxième et échoué au troisième :

$$\boxed{[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}}$$

Par indépendance des événements :

$$\boxed{\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}(S_2)\mathbb{P}(\overline{S_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$$

5) Soit $n \geqslant 2$. De même qu'aux questions précédentes,

$$\boxed{[X = n] = \left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k\right) \cap \overline{S_{n+1}}}$$

6) Par indépendance des événements S_k,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n}\right) \cap \overline{S_{n+1}}\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k)\right) \mathbb{P}(\overline{S_{n+1}}) \\
&= \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi de X est

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = n]) \geqslant 0$: on vérifiera en fin de calcul que la famille $(\mathbb{P}([X = n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable [1].

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 1 && \text{Par télescopage}
\end{aligned}$$

Comme $1 < +\infty$, la famille est sommable.

8) De même, $X \geqslant 0$, donc on vérifiera *a posteriori* que la famille était sommable.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}([X = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle \frac{n}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n!} - \frac{n}{n!(n+1)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{n+1-1}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= e - 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance et } \mathbb{E}(X) = e - 1}$$

Exercice 2 (D'après Centrale PC 2022)

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A orthodiagonalisable : soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^\top$.

$$\begin{aligned}
A^\top &= P^{\top\top} D^\top P^\top \\
&= PDP^\top \\
&= A
\end{aligned}$$

Donc A est symétrique.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons A symétrique. A est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, A est orthodiagonalisable.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une matrice } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est orthodiagonalisable si et seulement si elle est symétrique}}$$

1. C'est-à-dire que la série $\sum \mathbb{P}([X = n])$ converge

2) Un exemple dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

a) En notant C_j la j-ème colonne, $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Conclusion :

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ est un vecteur propre pour la valeur propre } \lambda_1 = 7.}$$

b) Sous-espace propre $E_7 = \operatorname{Ker}(7I_3 - A_1)$:

$$X \in E_7 \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff 2x + y - 2z = 0$$
$$\iff z = x + y/2$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y/2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Conclusion :

$$\boxed{E_7 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

Si vous aimez ruser, lorsqu'on trouve l'équation du plan E_7, son vecteur normal $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_1 (car les sous-espace propre sont deux à deux orthogonaux). Donc $v_2 = v_3 \wedge v_1$ est un vecteur de E_7, orthogonal à v_1 : (v_1, v_2) est libre, donc une base du plan E_7.

Spectre de A_1 : La matrice $A_1 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres (comptées avec multiplicité). $\lambda_1 = 7$ est valeur propre double, il reste donc une seule valeur propre λ_2 à déterminer.
La trace est invariante par changement de base, donc [2]

$$\operatorname{Tr} A_1 = 12 = 2 \times 7 + \lambda_2 = 14 + \lambda_2$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Les valeurs propres de } A_1 \text{ sont} & \lambda_1 = 7 & \text{de multiplicité } \alpha_1 = 2 \\ & \lambda_1 = -2 & \text{de multiplicité } \alpha_1 = 1 \end{array}}$$

c) Base orthonormée de E_7 : Posons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Orthonormalisons la base (v_1, w_2) de E_7 par le procédé de Gramm-Schmidt.

$$\|v_1\|^2 = 2 \qquad \text{posons} \qquad e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Quitte à trigonaliser sur $\mathbb{C}$, mais ici A_1 est symétrique réelle donc diagonalisable.

Soit $v_2 = w_2 - \lambda v_1$ tel que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$:

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle = 0 &= \langle v_1, w_2\rangle - \lambda\|v_1\|^2\\ &= \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\rangle - \lambda\|v_1\|^2\\ &= 1 - 2\lambda\end{aligned}$$

Donc $\lambda = 1/2$, et $v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$. Posons $e_2 = \dfrac{2v_2}{\|2v_2\|}$, avec $\|2v_2\|^2 = 2 \times 9$. Ainsi,

$$e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$$

<u>Base orthonormée de E_{-2}</u> : $\dim E_{-2} = 1$. Comme les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux, E_{-2} est la droite orthogonale à E_7. Le vecteur normal de E_7, qui se lit sur l'équation $2x + y - 2z = 0$, est donc un vecteur directeur de E_{-2} :

$$v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \|v_3\|^2 = 9 \quad \text{puis} \quad e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$$

On peut aussi faire le produit vectoriel — en justifiant de même. On peut aussi justifier par : E_7 stable donc $E_7^{\perp}$ est stable aussi, de dimension 1, donc v_3 normal à E_7 est un vecteur propre. On peut aussi résoudre le système — mais c'est plus calculatoire.

<u>Conclusion</u> : (e_1, e_2, e_3) est une base de vecteurs propres de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour la matrice A_1. D'où

$$\boxed{A_1 = PDP^{\top} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix} \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}}$$

3) a) Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

- <u>Symétrie</u> : Pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q, P)$$

Donc φ est symétrique.

- <u>Bilinéarité</u> : Soit $Q \in E$ fixé. Pour tout $(P_1, P_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \int_0^1 \Big(\lambda P_1(t) + P_2(t)\Big)Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$$

Donc $\varphi(., Q)$ est linéaire. Par symétrie, φ est bilinéaire.

- <u>Positive</u> : Pour tout $P \in E$, par positivité de l'intégrale,

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 \underbrace{(P(t))^2}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc φ est positive.

- Définie positive : Soit $P \in E$ tel que

$$\varphi(P,P) = \int_0^1 (P(t))^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, $t \mapsto (P(t))^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0,1]$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle :

$$\forall t \in [0,1], \qquad (P(t))^2 = 0$$

Donc P a un infinité de racines : tous les $t \in [0,1]$.
Donc $P = 0$.
Ainsi, φ est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

b) *Si $(x_1, \ldots, x_k)$ est une famille de vecteurs, la* matrice de Gram *associée est la matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{ij}$. Elle est symétrique et positive. Elle était déjà le sujet d'une épreuve du concours E3A PC 2016.*

Pour tout $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \varphi(X^i, X^j) \\ &= \int_0^1 t^{i+j} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i+j+1} \qquad \textit{(c'est la matrice de Hilbert)} \end{aligned}$$

c) *Vous pouvez toujours tester pour n petit, puis réfléchir un peu aux notations.*

Soit $U = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Notons $(HU)_i$ le i-ème coefficient de la matrice colonne HU. Par définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![0, n-1]\!], \qquad (HU)_i &= \sum_{j=0}^{n-1} h_{ij} a_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(X^i, X^j) a_j && \text{par définition de } h_{ij} \\ &= \varphi\Big(X^i, \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j\Big) && \text{par bilinéarité de } \varphi \\ &= \varphi(X^i, P) \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} U^\top HU &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (HU)_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \varphi(X^i, P) \\ &= \varphi\Big(\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i, P\Big) && \text{par bilinéarité de } \varphi \\ &= \varphi(P,P) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{U^\top HU = \varphi(P,P) \quad \text{avec} \quad P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k}$$

d) Par symétrie du produit scalaire – ou par calcul direct,

$$\forall (i,j) \in [\![0, n-1]\!]\,, \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j+1} = \varphi(X^i, X^j) = h_{ji}$$

Donc $H \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
D'après la question précédente, avec les notations précédentes,

$$\forall U \in \mathbb{R}^n, \qquad U^\top H U = \varphi(P,P) \geqslant 0$$

De plus, comme le produit scalaire est défini positif, $\varphi(P,P) = 0 \Longrightarrow P = 0$. Ce qui s'écrit aussi

$$\forall U \in \mathbb{R}^n,\ U \neq 0 \qquad U^\top H U = \varphi(P,P) > 0$$

Ainsi,

$$\boxed{H \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

4) a) Comme $\Sigma_Y = (\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$,

$$\mathrm{Tr}\ \Sigma_Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = V_T(Y)$$

b) Symétrie : Par symétrie de la covariance,

$$\begin{aligned} \Sigma_Y^\top &= (\mathrm{Cov}\,(Y_j, Y_i))_{ij} \\ &= (\mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j))_{ij} \\ &= \Sigma_Y \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Sigma_Y \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})}$
Formule : Par définition de $E(Y)$,

$$Y - E(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 - E(Y_1) \\ \vdots \\ Y_n - E(Y_n) \end{pmatrix}$$

De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $XX^\top$ est la matrice des $x_i x_j$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1x_1 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1x_1 & \cdots & x_1x_n \end{pmatrix} = XX^\top \end{array}$$

Donc $\big(Y - E(Y)\big)\big(Y - E(Y)\big)^\top_{i,j} = \big(Y_i - E(Y_i)\big)\big(Y_j - E(Y_j)\big)$.
L'espérance d'une matrice étant calculée terme à terme,

$$E\Big((Y - E(Y))(Y - E(Y))^\top\Big)_{i,j} = E\Big((Y_i - E(Y_i))(Y_j - E(Y_j))^\top\Big) = \mathrm{Cov}\,(Y_i, Y_j)$$

Ainsi,

$$\boxed{\Sigma_Y = E\Big((Y - E(Y))(Y - E(Y))^\top\Big)}$$

Translation par un vecteur constant : Soit U un vecteur constant dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
D'après ci-dessus, $\Sigma_{y+U} = E\Big((Y + U - E(Y+U))(Y + U - E(Y+U))^\top\Big)$.
Or, par linéarité terme à terme de l'espérance, $E(Y+U) = E(Y) + E(U) = E(Y) + U$.
Donc $Y + U - E(Y+U) = Y - E(Y)$, puis

$$\boxed{\Sigma_{Y+U} = \Sigma_Y}$$

c) Par définition du produit matriciel, $Z = \begin{pmatrix} & & \\ & m_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ entraîne

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,, \qquad Z_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} Y_j$$

Par linéarité de l'espérance, $E(Z_i)$ existe[3] Donc, par définition, $E(Z)$ existe et

$$\begin{aligned} E(Z)_i &= E(Z_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij} E(Y_j) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{Z \text{ admet une espérance et } E(Z) = ME(Y)}$$

- Existence : Soient $(i, j) \in [\![1, p]\!]$. Montrons l'existence de $\operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) = E(Z_i Z_j) - E(Z_i)E(Z_j)$. D'après ci-dessus, $E(Z_i)$ et $E(Z_j)$ existent. De plus,

$$\begin{aligned} Z_i Z_j &= \left(\sum_{k=1}^{n} m_{ik} Y_k \right) \left(\sum_{p=1}^{n} m_{jp} Y_p \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} m_{ik} m_{jp} Y_k Y_p \end{aligned}$$

  Or, pour tout k et tout p, $E(Y_k Y_p)$ existe car la covariance $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_p)$ existe (« on suppose que (...) Σ_Y [est] bien définie »).
  Donc, comme combinaison linéaire, $E(Z_i Z_j)$ existe. Ainsi $\operatorname{Cov}(Z_i, Z_j)$ existe : Z admet une matrice de covariance Σ_Z.
- Valeur : $Z - E(Z) = MY - MZ(Y) = M(Y - E(Y))$, donc

$$\big(Z - E(Z)\big)\big(Z - E(Z)\big)^{\top} = M(Y - E(Y))(Y - E(Y))^{\top} M^{\top}$$

  Puis, en passant à l'espérance (qui existe, coefficient par coefficient) :

$$\Sigma_Z = M \Sigma_Y M^{\top}$$

Conclusion :

$$\boxed{Z \text{ admet une matrice de covariance } \Sigma_Z \text{ et } \Sigma_Z = M \Sigma_Y M^{\top}}$$

5) a) Par définition de P, il existe une matrice diagonale D telle que $\Sigma_Y = PDP^{-1}$. De plus, les bases sont orthonormées, donc $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Sigma_X &= P^{\top} \Sigma_Y P && \text{D'après 4c, avec } M = P^{\top}. \\ &= D && \text{Par définition de } P \end{aligned}$$

$$\boxed{\Sigma_X \text{ est une matrice diagonale}}$$

3. Ici, tout n'est pas positif. Il faut donc être prudent, et commencer par vérifier que les espérances existent avant d'écrire des calculs. Comme les $E(Y_j)$ existent, tout va bien.

b) $$\begin{aligned}\Sigma_X &= (\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j))_{ij} && \text{Par construction de la matrice } \Sigma_X \\ &= \begin{pmatrix} V(X_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V(X_n) \end{pmatrix} && \text{Car } \Sigma_X \text{ est diagonale}\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $V(X_i) \geqslant 0$.
Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses coefficients diagonaux, donc $\mathrm{Sp}\,(\Sigma_X) \subset \mathbb{R}_+$.
Comme $\Sigma_Y = P\Sigma_X P^{-1}$,

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\Sigma_Y) = \mathrm{Sp}\,(\Sigma_X) \subset \mathbb{R}_+}$$

c) D'après 4a, et comme la trace est invariante par changeemnt de base,

$$V_T(X) = \mathrm{Tr}\ \Sigma_X = \mathrm{Tr}\ \Sigma_Y = V_T(Y)$$

d) Soit $X_0 \sim \mathscr{B}(1/2)$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Alors $V(X_0) = p(1-p) = \dfrac{1}{4}$.
De plus, comme $V(aX_0) = a^2 V(X_0)$, posons $(\lambda \geqslant 0)$

$$Z_\lambda = 2\sqrt{\lambda} X_0$$

Ainsi, $V(Z_\lambda) = 4\lambda V(X_0) = \lambda$:

$$\boxed{\text{Il existe une variable aléatoire discrète réelle } Z_\lambda \text{ de variance } \lambda}$$

e) Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variable aléatoire discrète mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$.
Posons, pour tout i, $Z_i = 2\sqrt{\lambda_i}$ et Z le vecteur colonne des Z_i.
Les variable aléatoire discrète $(Z_1, \ldots, Z_n)$ sont mutuellement indépendantes, donc pour tout $i \neq j$, $\mathrm{Cov}\,(Z_i, Z_j) = 0$. D'après la question précédente, $V(Z_i) = \lambda_i$. D'où

$$\boxed{\Sigma_Z = D}$$

f) A est symétrique réelle : d'après le théorème spectral, il existe $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
De plus, A est positive, donc $\mathrm{Sp}\,(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$.
Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive.
Soit Z comme ci-dessus, une variable aléatoire discrète telle que $\Sigma_Z = D$. Posons

$$Y = PZ$$

$$\begin{aligned}\text{Alors } \Sigma_Y &= P\Sigma_Z P^\top && \text{D'après 4c} \\ &= PDP^\top && \text{Par construction de } Z \\ &= A && \text{Car } P^\top = P^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il existe une variable aléatoire discrète } Y \text{ à valeur dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \Sigma_Y = A}$$

g) Soient $U_1 \in \mathrm{Im}\ \Sigma_Y$ et $U_2 \in \mathrm{Ker}\ \Sigma_Y$. Soit U_1' tel que $U_1 = \Sigma_Y U_1'$.
On peut aussi rédiger ce calcul avec des produits scalaires tout du long.

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2 \rangle &= U_1^\top U_2 \\ &= (U_1')^\top \Sigma_Y^\top U_2 \\ &= (U_1')^\top (\Sigma_Y U_2) && \text{Car } \Sigma_Y \text{ symétrique} \\ &= 0 && \text{Car } U_2 \in \mathrm{Ker}\ \Sigma_Y\end{aligned}$$

Donc Im $\Sigma_Y \perp$ Ker Σ_Y, en particulier Im $\Sigma_Y \cap$ Ker $\Sigma_Y = \{0\}$.
Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im } \Sigma_Y) + \dim(\text{Ker } \Sigma_Y) = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.
Donc, par égalité des dimensions et intersection nulle,

$$\boxed{\text{Im } \Sigma_Y \oplus_\perp \text{Ker } \Sigma_Y}$$

Exercice 3 (D'après BECEAS 2021)

L'idée générale, encore une fois, est qu'une matrice symétrique, c'est une matrice diagonale à un changement de base près. Dès que possible, dans l'exercice, changer de base pour se ramener à B diagonale.

1) Préliminaires.

a) Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Comme $\text{Tr}\,(MN) = \text{Tr}\,(NM)$,

$$\text{Tr } A = \text{Tr}\,(P(BP^{-1}) = \text{Tr}\,(BP^{-1}P) = \text{Tr } B$$

Cours.

b) Calculons ${}^tXX$ en fonction de Y :

$$\begin{aligned} {}^tXX &= {}^t(P^{-1}Y)P^{-1}Y \\ &= {}^tY{}^tP^{-1}P^{-1}Y && \text{Or } P^{-1} = {}^tP \\ &= {}^tYPP^{-1}Y \\ &= {}^tYY \end{aligned}$$

Donc ${}^tXX = 1$ entraîne ${}^tYY = 1$, et réciproquement :

$$\boxed{{}^tXX = 1 \text{ si et seulement si } {}^tYY = 1}$$

2) Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Rappelons que $P^{-1} = {}^tP$.

$\boxed{\subset}$ $$\begin{aligned} x \in R(A) &\Longrightarrow \exists X \in \mathscr{C}, \quad x = {}^tXAX \\ &\Longrightarrow \exists X \in \mathscr{C}, \quad x = {}^tXPBP^{-1}X \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = {}^t(P^{-1}X)B(P^{-1}X) \\ &\Longrightarrow \exists Y \in \mathscr{C}, \quad x = {}^tYBY && \text{Avec } Y = P^{-1}X \in \mathscr{C} \text{ d'après b} \\ &\Longrightarrow x \in R(B) \end{aligned}$$

Ainsi, $R(A) \subset R(B)$.

$\boxed{\supset}$ $B = P^{-1}AP$, avec $P^{-1} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, donc B est orthogonalement semblable à A, et d'après ci-dessus,

$$R(B) \subset R(A)$$

Par double inclusion,

$$\boxed{R\,(A) = R\,(B)}$$

3) **a)** D'après le théorème spectral, A est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) Supposons $B = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Alors $BX = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$. D'où

$$\boxed{{}^tXBX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2}$$

c) Cf exercice 24 vu en TD. Très classique.
Soient $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$ (théorème spectral).
Soit $X = PY$, et y_i les coordonnées de Y.
Alors
$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tXPDP^{-1}X \\ &= {}^t(P^{-1}X)D(P^{-1}X) && \text{Car } {}^tP = P^{-1} \\ &= {}^tYDY \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 && \text{D'après 3b} \end{aligned}$$

Et, d'après le calcul effectué au 1b, ${}^tXX = tYY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n \\ \implies & \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda_1 y_i^2 \leqslant \lambda_i y_i^2 \leqslant \lambda_n y_i^2 && \text{Car } y_i^2 \geqslant 0 \\ \implies & \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ \implies & \lambda_1 {}^tYY \leqslant {}^tYDY \leqslant \lambda_1 {}^tYY \\ \implies & \boxed{\lambda_1 {}^tXX \leqslant {}^tXAX \leqslant \lambda_1 {}^tXX} && \text{D'après les calculs ci-dessus} \end{aligned}$$

d) D'après la question précédente, pour tout $X \in \mathscr{C}$,
$$\lambda_1 \leqslant {}^tXAX \leqslant \lambda_n$$
Ainsi,
$$\boxed{R\,(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]}$$

e) Soit $X_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix}$.
$$\|X_\theta\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
Ainsi,
$$\boxed{X_\theta \text{ est de norme 1.}}$$

Soient A et D comme au 3c. D'après la question 2, $R(A) = R(D)$.
Montrons que $R(D) = [\lambda_1, \lambda_n]$. D'après le calcul ci-dessus (ou un calcul direct),
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad {}^tX_\theta D X_\theta = \lambda_1 \cos^2\theta + \lambda_n \sin^2\theta = (\cos^2\theta)\lambda_1 + (1 - \cos^2\theta)\lambda_n$$
Comme $\cos^2(\mathbb{R}) = [0,1]$ (image de $\mathbb{R}$ par la fonction cosinus),
$$\begin{aligned} \{{}^tX_\theta D X_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} &= \{t\lambda_1 + (1-t)\lambda_n \mid t \in [0,1]\} \\ &= [\lambda_1, \lambda_n] \end{aligned}$$
De plus $\{X_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathscr{C}$ donc
$$\{{}^tX_\theta D X_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset R(D)$$
D'où $[\lambda_1, \lambda_n] \subset R(D)$
D'après d, $R(D) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$. Finalement,
$$\boxed{R\,(A) = [\lambda_1, \lambda_n]}$$

f) La trace est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité :

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Si Tr $A = 0$, il y a nécessairement des valeurs propres positives et négatives (ou nulles), en particulier $\lambda_1 \leqslant 0 \leqslant \lambda_n$:

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est de trace nulle, alors } 0 \in [\lambda_1, \lambda_n] = R(A)}$$

Avec $A = \text{diag}(1, -1, -2) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $0 \in [-2, 1]$ mais Tr $A = -2 \neq 0$.

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse}}$$

4) *Ce n'est pas une question de valeurs propres : revenons à la définition de $R(A)$, avec un vecteur X simple.*
Soit $B = {}^t PAP$ orthogonalement semblable à A, de diagonale (Tr $A, 0, \dots, 0$).
D'après 2, $R(A) = R(B)$. De plus,

$$\text{Avec,} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^t XBX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tr } A \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \text{Tr } A \in R(B)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Tr } A \in R(A)}$$

5) **a)** $A = I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, et Tr $A = 2 \notin R(A) = \{1\}$.

b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons Tr $A = \lambda_1 + \lambda_2 \in R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant \lambda_2$$

Donc $0 \leqslant \lambda_2$ et $\lambda_1 \leqslant 0$. Ainsi $0 \in R(A)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$, alors $\lambda_1 \leqslant 0 \leqslant \lambda_2$ nous donne Tr $A \leqslant \lambda_2$ et $\lambda_1 \leqslant$ Tr A :

$$\text{Tr } A \in [\lambda_1, \lambda_2] = R(A)$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Tr } A \in R(A) \text{ si et seulement si } 0 \in R(A)}$$

6) **a)** Les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: c'est un des critères pour être une matrice orthogonale.
Effectuons un calcul blocs :

$$\begin{aligned}
{}^t PAP &= \left(\begin{array}{c} {}^t X_1 \\ \hline {}^t X_2 \end{array}\right) A \left(\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c} {}^t X_1 \\ \hline {}^t X_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} AX_1 & AX_2 \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} {}^t X_1 A X_1 & {}^t X_1 A X_2 \\ {}^t X_2 A X_1 & {}^t X_2 A X_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons Tr $A \in R(A)$. Alors, d'après 5b, $0 \in R(A)$, ce qui signifie

$$\exists X \in \mathscr{C}, \qquad {}^tXAX = 0$$

D'où le $X_2 \neq 0$ recherché ($\|X\| = 1 \neq 0$).

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $X_2 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tX_2AX_2 = 0$.
Quitte à le diviser par $\|X_2\| \neq 0$, on peut le supposer de norme 1.
On complète en une base orthonormée (X_1, X_2) de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Soit $P = (X_1|X_2) \in \mathscr{O}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique vers (X_1, X_2).
D'après le calcul du 6a,

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^tX_1AX_1 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, Tr $A =$ Tr ${}^tPAP = {}^tX_1AX_1$. Donc A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale (Tr $A, 0)$.
D'après 4, Tr $A \in R(A)$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Tr } A \in R(A) \text{ si et seulement si il existe } X_2 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tX_2AX_2 = 0.}$$

c) Nous venons de le montrer : si Tr $A \in R(A)$, il existe $X_2 \neq 0$ tel que ${}^tX_2AX_2 = 0$, ce qui entraîne que A est orthogonalement semblable à une matrice dont la diagonale est (Tr $A, 0)$.

7) **a)** Comme Tr $A \in R(A)$, par définition de $R(A)$, il existe $X_1 \in \mathscr{C}$ tel que ${}^tX_1AX_1 =$ Tr A.
On complète en une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et on note

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & \ldots & X_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & P' \end{array}\right) \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

la matrice (orthogonale) de passage. Alors, par un calcul blocs 2×2 identique au 6a, il vient

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} {}^tX_1AX_1 & {}^tX_1AP' \\ {}^tP'AX_1 & {}^tP'AP' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

Où $P' \in \mathscr{M}_{n+1,n}(\mathbb{R})$ donc $L = {}^tX_1AP' \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C = {}^tL \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B = {}^tP'AP' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie

$$ {}^tB = {}^tP'{}^tA{}^{tt}P' = B$$

En conclusion,

$$\boxed{\exists C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}), B \in S_n(\mathbb{R})/, A \text{ est orthogonalement semblable à } \begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix}}$$

b) La trace est invariante par changement de base, donc Tr $A =$ Tr $\begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix} =$ Tr $A +$ Tr B :

$$\boxed{\text{Tr } B = 0}$$

B est symétrique de trace nulle, donc d'après 3f, $0 \in R(B)$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Tr } B \in R(B)}$$

c) Par hypothèse, On a supposé que toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que Tr $A \in R\,(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale (Tr $A, 0, \ldots, 0)$.

Appliqué à la matrice B, elle est orthogonalement semblable à une matrice B' de diagonale $(0, \ldots, 0)$.

Soit $Q' \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage associée ($B = Q'B'Q'^{-1}$) et Q la matrice blocs

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix} \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Soit $P \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ comme au 7a. Par un calcul bloc 2×2, il vient

$$\begin{aligned} {}^t(PQ)A(PQ) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tr } A & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tQ' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tr } A & LQ' \\ C & BQ' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Tr } A & LQ' \\ {}^tQ'C & {}^tQ'BQ' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{Tr } A & LQ' \\ {}^tQ'C & B' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la diagonale de $A' = {}^t(PQ)A(PQ)$ est (Tr $A, 0, \ldots, 0)$. Comme $PQ \in \mathscr{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ (groupe),

$$\boxed{A \text{ est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale } (\text{Tr } A, 0, \ldots, 0)}$$

8) a) La trace étant invariante par changement de base, Tr $A = na$ et

$$\boxed{a = \frac{\text{Tr } A}{n}}$$

b) Soit

$$\boxed{B = A - (\text{Tr } A/n)I_n}$$

Comme Tr $I_n = n$, par linéarité de la trace, Tr $B =$ Tr $A -$ Tr $A = 0$.

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \ \forall A \in S_n(\mathbb{R}) \ \text{Tr } A \in R\,(A) \Longrightarrow \exists P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})/A = PA'P^{-1} \text{ avec } A' \text{ de diagonale } (\text{Tr } A, 0, \ldots, 0)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- <u>$\mathcal{H}_2$</u> : est vraie d'après 6c
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie d'après 7c.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \mathcal{H}_n \text{ est vraie}}$

La matrice B précédente est symétrique, de trace nulle, donc on peut appliquer 3f : Tr $B = 0 \in R(B)$. Et d'après ci-dessus, B est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(0, \ldots, 0)$.

En revenant à A, comme I_n est invariante par changement de base, la matrice A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à $a =$ Tr A/n.

FIN DE L'ÉPREUVE