Devoir surveillé - 10/01/2022 - 4 heures - Calculatrice interdite

ATTENTION : SUJET RECTO-VERSO SUR 5 PAGES

Recommandations et présentation de la copie :

- **Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il faut indiquer précisément le numéro de la question utilisée.**
- Chaque exercice du devoir surveillé est commencé sur une nouvelle page (au maximum, un exercice par page).
- Les résultats sont encadrés ou soulignés à la règle et au stylo rouge. Attention, il ne s'agit pas de tout souligner ou encadrer !
- Les questions doivent être clairement identifiées et dans l'ordre.
- La présentation, l'écriture, l'orthographe et la syntaxe doivent être soignées.
- Chaque page de la copie doit être correctement numérotée.
- Il faut aérer la copie.
- Garder la feuille d'énoncé, ne pas répondre dessus.
- Le nombre de points de présentation est proportionnel au nombre de questions abordées de manière significative (une copie blanche ne rapporte pas de points de présentation !).

Exercice n°1 : Théorème de décomposition de Dunford

Dans tout l'énoncé, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappels et résultats admis :

- On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) :
>
> (3) N est nilpotente :
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la **décomposition de Dunford** de A.

- On rappelle qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^p = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. On dit qu'un polynôme non nul $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.
- De plus, on admet que si $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{K}[X]$, annulateur d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

1) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable.

2) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est nilpotente.

3) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

4) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

5) Donner un exemple d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

6) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A.
Indication : on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

7) Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

8) Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

9) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

10) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.
Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

11) Déterminer le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice B.

12) En déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Exercice n°2 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

1) Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.

2) Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

4) Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

5) Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6) Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$.

7) En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

8) Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

9) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10) Justifier que P_k est de degré k.

11) Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12) Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

13) En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

14) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **9)** et **13)**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

15) Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

16) En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$

17) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \neq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$