

Épreuve de Mathématiques 6

Correction

4

Exercice 1 (CCP TPC 2018)

Partie 1

1) Calculons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -3 & 3 & x-1 \end{vmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ 0 & -x-2 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} C_2 \leftarrow C_2 + C_3$$

$$= (x+2) \left|\begin{array}{cc|c} x-1 & 0 & -3 \\ -3 & x+2 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \quad \text{(Triangulaire par blocs)}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x+2)^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = (x-1)(x+2)^2}$$

Valeurs propres :

- $\lambda = 1$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = -2$ de multiplicité $\alpha = 2$

Vous avez bien sûr vérifié avec la trace : $\operatorname{Tr} A = 2 - 5 = -3 = 1 - 2 - 2$.

2) D'après le théorème du cours, pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha$ avec α la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

Ainsi, $\dim E_1 = 1$, et il reste à vérifier que $\dim E_{-2} = 2$.

<u>Calcul de $E_{-2} = \operatorname{Ker}(-2I_3 - A)$</u> :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\iff -x + y - z = 0$$

$$\iff y = x + z$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{-2} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right)}$$

Ainsi, $\dim E_{-2} = 2 = \alpha$.
Par conséquent, le polynôme caractéristique est scindé et la dimension chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre : d'après le théorème de diagonalisation,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

3) Calcul de $E_1 = \text{Ker}\,(I_3 - A)$:

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \iff (I_3 - A)X = 0$$

$$\iff \begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ -3x + 6y - 3z = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \qquad L_2 = L_1 + L_3$$

$$\iff \begin{cases} y = z \\ x = y = z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Vous pouvez toujours vérifier que $AX = \lambda X$, pour vérifier vos calculs.
Finalement, comme $\mathbb{R}^3 = E_{-2} \oplus E_1$, en mettant bout à bout les bases de ces sous-espace vectoriel,

$$\boxed{\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right)}$$

4) *Les matrices D et P dépendent de votre choix de $\mathscr{B}'$, et en particulier de l'ordre des vecteurs – et donc des valeurs propres dans D.*

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}}$$

5) *Dans la joie et l'enthousiasme, en route pour un pivot de Gauss. Donc : à l'aide d'opérations sur les lignes, mise sous forme triangulaire puis remontée de pivot.*

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&1&-1&1 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&1&-1\\ 0&1&0&-1&1&0\\ 0&0&1&1&-1&1 \end{array}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérifiez au moins les derniers coefficients en bas à droite du produit PP^{-1}.

D'autres couples P, P^{-1} possibles :

$$(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}), \quad (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}), \quad (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix})$$

Partie 2 (Application aux équations différentielles)

1) $\boxed{X' = AX}$ avec la matrice A de la partie 1.

2) $\boxed{X = PX_1}$

3) Dans la base $\mathscr{B}'$, le système s'écrit $X_1' = DX_1$, c'est-à-dire

$$(S') \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & -2x_1(t) \\ y_1'(t) & = & -2y_1(t) \\ z_1'(t) & = & z_1(t) \end{array} \right.$$

Ce système a pour solutions :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & C_1 e^{-2t} \\ y_1(t) & = & C_2 e^{-2t} \\ z_1(t) & = & C_3 e^{t} \end{array} \right.$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ dépendent des conditions initiales. D'après le résultat de la question 2, la formule de changement de base nous donne $X = PX_1$, donc

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = C_1 e^{-2t} + C_3 e^t \\ y(t) = (C_1 + C_2) e^{-2t} + C_3 e^t \\ z(t) = C_2 e^{-2t} + C_3 e^t \end{array}}$$

De plus $X_1 = P^{-1} X$, donc

$$X_1(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $C_1 = 3$, $C_2 = -1$ et $C_3 = -3$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = -2e^{-2t} + 3e^t \\ y(t) = -3e^{-2t} + 3e^t \\ z(t) = -e^{-2t} + 3e^t \end{array}}$$

Exercice 2 (CCP PSI 2020)

Partie 1 (La dimension 3)

Q15. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 - C_3 \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ -x & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 + L_1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} \quad \text{(Triangulaire par blocs)} \\
&= x \begin{vmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{vmatrix} \\
&= x(x^2-4) \\
&= x(x-2)(x+2)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = x(x-2)(x+2)}$$

Q16. Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Valeurs propres :

- $\lambda = 0$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = 2$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = -2$ de multiplicité $\alpha = 1$

Vous avez bien sûr vérifié avec la trace : $\operatorname{Tr} A = 0 = 0 + 2 - 2$.

D'après l'encadrement $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha$,

$$\boxed{\text{Les sous-espace propre sont tous de dimension } 1}$$

Q17. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) &= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ -2 & x & 2 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} C_1 \longleftarrow C_1 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 - L_1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&= x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & -2 & x \end{vmatrix} \quad \text{(Triangulaire par blocs)} \\
&= x \begin{vmatrix} x & 2 \\ -2 & x \end{vmatrix} \\
&= x(x^2+4) \\
&= x(x-2i)(x+2i)
\end{aligned}$$

Comme $i\chi_B(ix) = i^2 x(ix-2i)(ix+2i) = i^4 \chi_A(x)$,

$$\boxed{\chi_B(x) = x(x^2+4) = x(x-2i)(x+2i) \quad \text{et} \quad \chi_A(x) = i\chi_B(ix)}$$

Q18. Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (il y a des valeurs propres complexes non réelles), donc la matrice B n'est pas diagonalisable.

Par contre, le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}, \text{ mais l'est sur } \mathbb{C}}$$

De même qu'à la question Q16, on trouve

Valeurs propres réelles :

- $\lambda = 0$, et $\dim E_0 = 1$

Valeurs propres complexes :

- $\lambda = 0$, et $\dim E_0 = 1$
- $\lambda = 2i$, et $\dim E_{2i} = 1$
- $\lambda = -2i$, et $\dim E_{-2i} = 1$

Vous savez tous que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Donc, en particulier, $O \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: les valeurs propres réelles sont aussi des valeurs propres complexes.

Q19. $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/i & 0 \\ 0 & 0 & 1/-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -iB \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{D^{-1}AD = -iB}$$

Q20.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}A\Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La conclusion n'était accessible qu'aux 5/2 : la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Q21. *On commence par chercher au brouillon, comme en exercice, en partant de* $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_0 \sin^n(x) + \lambda_1 \cos(x)\sin^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_n \cos^n(x) = 0$$

On évalue en un x simple, par exemple $x = 0$: $\lambda_n = 0$. Puis on peut simplifier par cos et reprendre le raisonnement. On s'inspire donc de la question de cours portant sur la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \tag{1}$$

Supposons qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$: $\{k \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\} \neq \emptyset$.
Soit k_0 le plus grand entier k tel que $\lambda_k \neq 0$: $k_0 = \max\{k \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$.
L'équation 1 s'écrit

$$\sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k f_k = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{n-k}(x) = \lambda_0 \sin^n(x) + \cdots + \lambda_{k_0}\cos^{k_0}(x)\sin^{n-k_0}(x) = 0$$

En se plaçant sur un intervalle où sin ne s'annule pas, on divise par $\sin^{n-k_0}(x) \neq 0$:

$$\forall x \in]0, \pi/2] \qquad \sum_{k=0}^{k_0} \lambda_k \cos^k(x)\sin^{k_0-k}(x) = \lambda_0 \sin^{k_0}(x) + \cdots + \lambda_{k_0}\cos^{k_0}(x) = 0$$

Puis on prends la limite lorsque $x \to 0$:

$$\lambda_{k_0} = 0$$

C'est absurde. Donc l'hypothèse de départ est fausse : pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k = 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre}}$$

Par définition de V_n, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est génératrice de V_n. Comme nous venons de montrer qu'elle est libre, c'est une base de V_n. Par définition de la dimension,

$$\boxed{\dim V_n = n + 1}$$

Q22. • Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k' \in V_n$:
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. La fonction f_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, avec une évaluation paresseuse,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_k'(x) &= -k\sin(x)\cos^{k-1}(x)\sin^{n-k}(x) + (n-k)\cos^k(x)\cos(x)\sin^{n-k-1}(x)\\ &= -k\cos^{k-1}(x)\sin^{n-k+1}(x) + (n-k)\cos^{k+1}(x)\sin^{n-k-1}(x)\\ &= -kf_{k-1}(x) + (n-k)f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

Évaluation paresseuse : si $k = 0$, f_{-1} n'est pas définie mais il y a un coefficient 0 devant ce morceau de l'expression, idem dans le cas $k = n$ et f_{n+1} non définie.
Ainsi,

$$\boxed{f_k' \in V_n}$$

• Montrons que $\varphi_n \in \mathscr{L}(V_n)$:
- Linéarité : Soit $(f, g) \in V_n^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\varphi_n(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'\\ &= \lambda f' + g' && \text{La dérivation est linéaire}\\ &= \lambda\varphi_n(f) + \varphi_n(g)\end{aligned}$$

C'est évident, mais il fallait le faire.
- Montrons que $\varphi_n : V_n \to V_n$: *C'est le point où il y a quelque chose à montrer.*
Au brouillon, on commence naturellement : revenir aux définitions, de « endo », de V_n, de f_k etc. soit $f \in V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \ / \ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\right\}$, c'est-à-dire $f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k$.
Montrons que $\varphi_n(f) \in V_n$. Or $\varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_n(f_k)$.
Donc finalement, il suffit de montrer que $\varphi_n(f_k) \in V_n$ pour tout k... ce que nous venons de faire. Passons au propre.

Soit $f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \in V_n$. Par linéarité de φ_n,

$$\varphi_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k'$$

Or, d'après ci-dessus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k' \in V_n$. Donc, comme combinaison linéaire d'éléments de V_n, $\varphi_n(f) \in V_n$.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi_n \in \mathscr{L}(V_n)}$$

- Matrice B_n de φ_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$:
D'après Q22, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(f_0) &= nf_1 \\
\varphi_n(f_1) &= -f_0 + (n-1)f_2 \\
&\vdots \\
\varphi_n(f_k) &= -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1} \\
&\vdots \\
\varphi_n(f_{n-1}) &= -(n-1)f_{n-2} + f_n \\
\varphi_n(f_n) &= -nf_{n-1}
\end{aligned}
\qquad
\boxed{B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Q23. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\overline{a+ib} = a - ib$ et $\cos x + i\sin x = e^{ix}$,

$$\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k} &= \left(e^{ix}\right)^k \left(\overline{e^{ix}}\right)^{n-k} \\
&= e^{ikx}\left(e^{-ix}\right)^{n-k} \\
&= e^{ikx}e^{-i(n-k)x} \\
&= e^{i(2k-n)x}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k(\cos x - i\sin x)^{n-k}}$$

Q24. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
(\cos x + i\sin x)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^j(x) i^{k-j} \sin^{k-j}(x) \\
(\cos x - i\sin x)^{n-k} &= \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cos^p(x) i^{n-k-p} \sin^{n-k-p}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question Q24,

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cos^j(x) i^{k-j} \sin^{k-j}(x)\right) \left(\sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} \cos^p(x) i^{n-k-p} \sin^{n-k-p}(x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j} \cos^j(x) i^{k-j} \sin^{k-j}(x) \binom{n-k}{p} \cos^p(x) i^{n-k-p} \sin^{n-k-p}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{p} i^{k-j+n-k-p} \cos^{j+p}(x) \sin^{k-j+n-k-p}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{p} i^{k-j+n-k-p} \cos^{j+p}(x) \sin^{n-(j+p)}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{p=0}^{n-k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{p} i^{n-j-p} f_{j+p}(x)
\end{aligned}$$

Or $j + p \in [\![0, n]\!]$, donc $g_k \in V_n$:

$$\boxed{\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad g_k \in V_n}$$

Q25. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_k'(x) = i(2k-n)e^{i(2k-n)x} = i(2k-n)g_k(x)}$.
Ainsi, $\varphi_n(g_k) = i(2k-n)g_k$.
Or $g_k \neq 0$ car $g_k(0) = 1$. Donc g_k est un vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $\lambda = (2k-n)i$.
D'après la question Q21, $\dim V_n = n+1$, et nous venons de trouver $n+1$ valeurs propres distinctes de φ_n.
Or $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)} \dim E_\lambda \leqslant \dim E$ (avec $E = V_n$ ici) et $\dim E_\lambda \geqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)$.
Donc, nécessairement,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \{i(2k-n) \mid k \in [\![0,n]\!]\}}$$

et $\dim E_\lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)$.
Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g_k \in E_{i(2k-n)}$ et $g_k \neq 0$, donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad E_{i(2k-n)} = \mathrm{Vect}(g_k)}$$

On pouvait aussi remarquer que les g_k sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, donc $(g_0, \dots, g_n)$ est une famille libre. Elle est constituée de $n+1$ vecteurs dans V_n de dimension $n+1$, donc c'est une base de V_n. On vient donc de construire une base de vecteurs propres pour φ_n, qui est diagonalisable.

Q26. *Un automorphisme est un endomorphisme et un isomorphisme.*
Comme φ_n est un endomorphisme en dimension finie, pour que φ_n soit bijectif, il suffit que φ_n soit injectif.
Or $\mathrm{Ker}\,\varphi_n \neq \{0\}$ signifie que 0 est valeur propre.
Si n est pair, pour $k = n/2 \in [\![0,n]\!]$ on a $i(2k-n) = 0 \in \mathrm{Sp}(\varphi_n)$ et donc φ_n n'est pas injectif, donc pas bijectif.
Si n est impair, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $i(2k-n) \neq 0$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(\varphi_n)$ et φ_n est injectif, donc bijectif.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi_n \text{ est un automorphisme de } V_n \text{ si et seulement si } n \text{ est impair}}$$

Q27. Reprenons l'expression obtenue à la question Q24 :

$$g_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{p=0}^{n-n} \binom{n}{j} \binom{n-n}{p} i^{n-j-p} f_{j+p} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} f_j$$

Ainsi, dans la base $(f_0, \dots, f_n)$, le vecteur colonne des coordonnées de g_n est $\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Comme $E_{in} = \mathrm{Ker}\,(in\,\mathrm{id}_{V_n} - \varphi_n) = \mathrm{Vect}\,(g_n)$ d'après la question Q25,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(inI_{n+1} - B_n) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$$

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Q28. *On commence par écrire le produit avec les notations du cours :* $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n} a_{ik}b_{kj}$, *puis on adapte.*

Par définition du produit matriciel, le terme général $b_{k\ell}$ du produit DM s'écrit

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,p]\!], \qquad b_{k\ell} = \sum_{j=1}^{p} d_{kj}m_{j\ell} = d_{kk}m_{k\ell}$$

Car D est diagonale. Ainsi, on multiplie la k-ième ligne par d_{kk} :

$$\boxed{DM = (d_{kk}m_{k\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p}}$$

De même, $\sum_{j=1}^{p} m_{kj}d_{j\ell} = m_{k\ell}d_{\ell\ell}$ et on multiplie la ℓ-ième colonne par $d_{\ell\ell}$:

$$\boxed{MD = (m_{k\ell}d_{\ell\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p}}$$

Q29. Comme $i^{-p} = (-i)^p$, D_n a pour inverse la matrice diagonale de coefficients diagonaux $((-i)^{k-1})_{1\leqslant k\leqslant n+1}$.

$$D_n^{-1}A_nD_n = D_n^{-1}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2i^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & (n-1)i & 0 & 3i^3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2i^{n-2} & 0 & ni^n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & i^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (MD \text{ ci-dessus})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -ni & 0 & -2i^3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & (n-1)i^3 & 0 & 3i^5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & (-1)^{n-1}2i^{n-2}i^{n-1} & 0 & (-1)^{n-1}ni^ni^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (-1)^ni^ni^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (DM \text{ ci-dessus})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -ni & 0 & 2i & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1)i & 0 & 3i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & (-1)^{2n-3}2i & 0 & ni \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -iB_n$$

En effet, d'après Q28, $D_n^{-1}MD_n$ a pour coefficient à la k-ième ligne et ℓ-ième colonne $\widetilde{m}_{k\ell} = (-i)^{k-1}m_{k\ell}i^{\ell-1}$.
Pour la diagonale sous la diagonale principale, $k = \ell + 1$ et

$$\widetilde{m}_{\ell+1,\ell} = (-i)^{\ell}i^{\ell-1}m_{\ell+1,\ell} = (-1)^{\ell}i^{2\ell-1}m_{\ell+1,\ell} = (-1)^{\ell+\ell-1}im_{\ell+1,\ell} = -im_{\ell+1,\ell}$$

Pour la diagonale au-dessus de la diagonale principale, $k = \ell - 1$ et

$$\widetilde{m}_{\ell-1,\ell} = (-i)^{\ell-2}i^{\ell-1}m_{\ell-1,\ell} = (-1)^{\ell-2}i^{2\ell-3}m_{\ell-1,\ell} = (-1)^{\ell-2+\ell-2}im_{\ell-1,\ell} = im_{\ell-1,\ell}$$

On retrouve $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$.
Comme deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique (QC, démonstration à refaire ici),

$$\begin{aligned}
\chi_{A_n}(X) &= \det(XI_n - A_n)\\
&= \det(D_n^{-1}(XI_n - A_n)D_n)\\
&= \det(XI_n + iB_n)\\
&= \det(-i(iXI_n - B_n))\\
&= (-i)^n \chi_{B_n}(iX)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_{A_n}(X) = (-i)^n \chi_{B_n}(iX)}$$

On vérifie la cohérence de ses résultats : la formule montré en Q17 pour le cas $n = 3$ est-elle bien un cas particulier de la formule Q29 ?

Q30. D'après la question Q25 de la Partie II, B_n a pour valeurs propres les $i(2k-n)$ avec $k \in [\![0,n]\!]$. Donc, d'après Q29, les $2k - n$ avec $k \in [\![0,n]\!]$ sont des racines de χ_{A_n}.
Il y en a $n+1$ deux à deux distinctes, donc on a l'ensemble des racines de χ_{A_n} : ce polynôme est scindé à racines simples, et

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(A_n) = \{2k - n \mid k \in [\![0,n]\!]\}}$$

Comme χ_{A_n} est scindé à racines simples,

$$\boxed{A_n \text{ est diagonalisable}}$$

Montrons que $\mathrm{Ker}\,(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0\\ p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$: Soit $P = \begin{pmatrix} p_0\\ p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}$.

D'après Q27 de la Partie II, si on note $Q = \begin{pmatrix} q_0\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}$, $B_nQ = inQ$. Donc $-iB_nQ = nQ$.

Or, qu'après Q29, $A_n = D_n(-iB_n)D_n^{-1}$. En effectuant le changement de base de matrice D_n, il vient

$$A_n(D_nQ) = n(D_nQ)$$

En notant que $q_k = i^{n-k}p_k$, donc que $D_nQ = \begin{pmatrix} q_0\\ iq_1\\ \vdots\\ i^nq_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^{n-1}p_0\\ i^{n-1}p_1\\ \vdots\\ i^{n-1}p_n\end{pmatrix} = i^{n-1}P$, on a $P \neq 0$ et $A_nP = nP$.
Donc P est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n.
Or toutes les valeurs propres sont simples, donc tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(nI_{n+1} - A_n) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0\\ p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}}$$

Exercice 3 (PT 2015 B)

1) a)

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) &\Longrightarrow f(x) = \lambda x\\
&\Longrightarrow f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x\\
&\Longrightarrow f^2(x) - \lambda^2 x = 0\\
&\Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f^2 - \lambda^2\,\mathrm{id}_E)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)\subset\mathrm{Ker}\,(f^2-\lambda^2\,\mathrm{id}_E)}$$

Si $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda\,\mathrm{id}_E)\neq\{0\}$, alors $\mathrm{Ker}\,(f^2-\lambda^2\,\mathrm{id}_E)\neq\{0\}$. *Il fallait évidemment justifier ses affirmations.*
Par conséquent, λ valeur propre de f implique λ^2 valeur propre de f^2 :

$$\boxed{\{\lambda^2\mid\lambda\in\mathrm{Sp}\,(f)\}\subset\mathrm{Sp}\,(f^2)}$$

b) *Cette question ressemble beaucoup à une question de cours, avec $v=u$. Il est presque toujours plus simple de montrer une égalité ($=\{0\}$) qu'une inégalité.*
La question précédente avec $\lambda=0$ s'écrit $\mathrm{Ker}\ f\subset\mathrm{Ker}\ f^2$. Donc $\dim\mathrm{Ker}\ f\leqslant\dim\mathrm{Ker}\ f^2$.
Supposons qu'il y a égalité : $\dim\mathrm{Ker}\ f=\dim\mathrm{Ker}\ f^2$.
L'inclusion et l'égalité des dimensions entraîne $\mathrm{Ker}\ f=\mathrm{Ker}\ f^2$.
Montrons que $\mathrm{Ker}\ f\cap\mathrm{Im}\ f=\{0\}$:

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{Ker}\ f\cap\mathrm{Im}\ f&\Longrightarrow f(x)=0\quad\text{et}\quad\exists y\in E\ x=f(y)\\&\Longrightarrow\exists y\in E\ x=f(y)\quad\text{et}\quad f^2(y)=0\\&\Longrightarrow\exists y\in E\ x=f(y)\quad\text{et}\quad y\in\mathrm{Ker}\ f^2=\mathrm{Ker}\ f\\&\Longrightarrow x=0\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\ f\cap\mathrm{Im}\ f=\{0\}$:
Par contraposition, si $\mathrm{Ker}\ f\cap\mathrm{Im}\ f\neq\{0\}$, alors $\dim\mathrm{Ker}\ f<\dim\mathrm{Ker}\ f^2$.
Comme ce sont des entiers :

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\ f^2)\geqslant\dim(\mathrm{Ker}\ f)+1}$$

c) Par définition $P_f(x)=\det(x\,\mathrm{id}_E-f)$ et $P_{f^2}(x)=\det(x\,\mathrm{id}_E-f^2)$.
D'où, en rentrant le $(-1)^{\dim E}$ par multilinéarité de det (linéarité par rapport à chaque colonne)

$$\begin{aligned}(-1)^dP_f(X)P_f(-X)&=(-1)^d\det(X\,\mathrm{id}_E-f)\det(-X\,\mathrm{id}_E-f)&&\\&=\det(X\,\mathrm{id}_E-f)\det(X\,\mathrm{id}_E+f)&&n\text{-linéarité avec }n=\dim E\\&=\det\Big((X\,\mathrm{id}_E-f)\circ(X\,\mathrm{id}_E+f)\Big)&&\det(f\circ g)=\det(f)\det(g)\\&=\det(X^2\,\mathrm{id}_E-f^2)&&\text{en développant}\\&=P_{f^2}(X^2)&&\end{aligned}$$

2) a)

- Pour tout $P\in E$, $\deg(f(P))\leqslant3$ donc, comme $n\geqslant3$, $f(P)\in E$.
  Donc f est à valeurs dans E.
- $\forall(P,Q)\in E^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(\lambda P+Q)&=(X^2-X+1)(\lambda P+Q)(-1)+(X^3-X)(\lambda P+Q)(0)+(X^3+X^2+1)(\lambda P+Q)(1)\\&=\lambda\Big((X^2-X+1)P(-1)+(X^3-X)P(0)+(X^3+X^2+1)P(1)\Big)\\&\quad+\Big((X^2-X+1)Q(-1)+(X^3-X)Q(0)+(X^3+X^2+1)Q(1)\Big)\\&=\lambda f(P)+f(Q)\end{aligned}$$

  Donc f est linéaire.

Conclusion : $\boxed{f\text{ est un endomorphisme de }E}$

b) • Noyau : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Développons pour écrire $f(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker} f &\Longrightarrow f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1) = 0 \\
&\Longrightarrow (P(0) + P(1))X^3 + (P(-1) + P(1))X^2 \\
&\qquad\qquad - (P(-1) + P(0))X + P(-1) + P(1) = 0 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} P(0) + P(1) &= 0 \\ P(-1) + P(1) &= 0 \\ P(-1) + P(0) &= 0 \\ P(-1) + P(1) &= 0 \end{cases} \\
&\Longrightarrow P(0) = P(1) = P(-1) = 0 \\
&\Longrightarrow 0,\ 1 \text{ et } -1 \text{ sont des racines de } P \\
&\Longrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]\ P = X(X-1)(X+1)Q \quad \text{car } n \geqslant 0 \text{ donc } \mathbb{R}_{n-3}[X] \text{ existe}
\end{aligned}$$

Réciproquement :

$$\begin{aligned}
&\exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]\ P = X(X-1)(X+1)Q \\
\Longrightarrow\ & f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1) = 0 \\
\Longrightarrow\ & P \in \operatorname{Ker} f
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = X(X-1)(X+1)\mathbb{R}_{n-3}[X] \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Ker} f = n - 2}$$

• Image : Le théorème du rang nous dit *(ça doit être pavlovien)*

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = n + 1 - (n - 2) = 3$$

De plus, pour tout $P \in E$,

$$\begin{aligned}
f(P) &= (P(0) + P(1))X^3 + (P(-1) + P(1))X^2 - (P(-1) + P(0))X + P(-1) + P(1) \\
&= aX^3 + bX^2 + cX + b \\
&= aX^3 + b(X^2 + 1) + cX \\
&\in \operatorname{Vect}(X^3, X^2 + 1, X)
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X^3, X^2 + 1, X)$.
Or $(X^3, X^2 + 1, X)$ une famille échelonnée en degré donc libre.
Ainsi, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(X^3, X^2 + 1, X) = 3$,
puis

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X^3, X^2 + 1, X) \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} f = 3}$$

c) Comme $n \geqslant 3$, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2 \geqslant 1$, donc f n'est pas injectif.
Comme f est un endomorphisme en dimension finie, il n'est pas non plus surjectif.

d) Comme f n'est pas injectif, $E_0 = \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Ainsi,

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$$

Notons α sa multiplicité. Comme $\dim E_0 \leqslant \alpha$ et que $\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} f = n - 2$, il vient

$$\boxed{\alpha \geqslant n - 2}$$

e) (après calcul, mettre au moins un étape intermédiaire sur la copie)

$$f(Q_1) = 4Q_1 \qquad \text{et} \qquad f(Q_2) = 2Q_2$$

En conclusion $\boxed{Q_1 \text{ est un vecteur propre de } f \text{ pour la valeur propre 4, et } Q_2 \text{ pour la valeur propre 2}}$

f) D'après les résultats de la question (b), le polynôme $X^3 - X$ appartient à $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, ce qui montre que

$\boxed{\text{La relation } \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E \text{ n'est pas satisfaite}}$

g) D'après la question $1(a)$, tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2.
Puisque 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, 0, 4 et 16 sont des valeurs propres de f^2.
De plus, d'après la question $2(f)$, $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$, et donc, d'après la question $1(b)$,

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2) \geqslant \dim \operatorname{Ker}(f) + 1 = n - 1$$

Les sous-espaces propres de f^2 associés à 4 et 16 étant de dimension au moins 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de f^2 est supérieure ou égale à $n-1+1+1 = n+1 = \dim(E)$.
On en déduit que f^2 est diagonalisable, et n'admet aucune autre valeur propre que 0, 4 et 16. De plus :

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2) = n - 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 4\,\mathrm{id}_E) = 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 16\,\mathrm{id}_E) = 1.$$

h) Puisque f^2 est diagonalisable, le polynôme caractéristique $P_{f^2}(X)$ est scindé, et, au vu des dimensions des sous-espaces propres :

$$P_{f^2}(X) = X^{n-1}(X-4)(X-16).$$

Ainsi, $P_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$, et donc, en utilisant $1(c)$:

$$P_f(X)P_f(-X) = (-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4).$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ divise donc $(-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4)$, qui est un polynôme scindé. Ainsi, $P_f(X)$ est scindé, donc $\boxed{f \text{ est trigonalisable}}$
Montrons que f n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde : si $f$est diagonalisable, alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f. Puisque $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension $n-2$, on peut choisir une telle base $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $f(P_i) = 0$ pour $i \leqslant n-3$ et $f(P_i) = \lambda_i P_i$ pour $i \geqslant n-2$ avec λ_i valeur propre non nulle de f. Mais alors, $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est encore une base de vecteurs propres pour f^2 : les valeurs propres associées sont 0 pour $i \leqslant n-3$ et $\lambda_i^2 \neq 0$ pour $i \geqslant n-2$, donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2) = n-2$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question (g). On a ainsi établi que f n'est pas diagonalisable.
On sait déjà que 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, la dimension du sous-espace propre associé à 0 est $n-2$. Si f admettait une autre valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure ou égale à $n+1$, ce dont on pourrait déduire que f est diagonalisable. Ainsi, les seules valeurs propres de f sont 0, 2 et 4, et les dimensions des sous-espaces propres sont pour la même raison (non diagonalisabilité de f) $n-2$, 1 et 1. Le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des multiples de $X(X-1)(X+1)$, le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par Q_2, et celui associé à 4 est la droite vectorielle engendrée par Q_1.

FIN DE L'ÉPREUVE