

Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (CCINP 2019 PC)

Partie 1 (Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$)

I.1 - Généralités

- 1) Soit P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ non nuls. La fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Notons $d = \deg P$ et a_d le coefficient de plus haut degré (donc $a_d \neq 0$) de P , et de même $e = \deg Q$ et $b_e \neq 0$ le coefficient de plus haut degré de Q .

$$t^2 f(t) \sim a_d b_e t^{d+e+2} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

par croissance comparée. Ainsi, $f(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc par comparaison, $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge absolument donc converge.

Si P ou Q est nul, l'intégrale converge aussi – et est nulle. Conclusion :

L'intégrale définissant $(P | Q)$ est convergente

- 2) D'après la question 1, les intégrales qui suivent convergent. Montrons que $(. | .)$ est un produit scalaire.

- Symétrique : Pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t} dt = (Q | P)$$

Donc $(. | .)$ est symétrique.

- Bilinéaire : Soit $Q \in E$ fixé. Pour tout $(P_1, P_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$(\lambda P_1 + P_2 | Q) = \int_0^{+\infty} (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)e^{-t} dt = \lambda(P_1 | Q) + (P_2 | Q)$$

Donc $(. | Q)$ est linéaire. Par symétrie, $(. | .)$ est bilinéaire.

- Positive : Pour tout $P \in E$, par positivité de l'intégrale,

$$(P | P) = \int_0^{+\infty} \underbrace{(P(t))^2}_{\geq 0} e^{-t} dt \geq 0$$

Donc $(. | .)$ est positive.

- Définie positive : Soit $P \in E$ tel que

$$(P | P) = \int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$$

Ainsi, $t \mapsto (P(t))^2 e^{-t}$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad (P(t))^2 e^{-t} = 0$$

Donc P a une infinité de racines : tous les $t \in [0, +\infty[$ ($e^{-t} \neq 0$).

Donc $P = 0$.

Ainsi, $(. | .)$ est définie positive.

Conclusion :

$(. | .)$ est bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

- 1) D'après la question 1, avec $P = X^k$ ou X^{k-1} et $Q = 1$, les intégrales considérées convergent.

Toujours vérifier la convergence avant de se lancer dans les calculs.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^k e^{-t} = 0$, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt &= \left[-t^k e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} k t^{k-1} e^{-t} dt && \text{avec } \begin{cases} u = t^k & u' = k t^{k-1} \\ v = -e^{-t} & v' = e^{-t} \end{cases} \\ &= k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

- 2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : (X^k | 1) = k!$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Toutes les intégrales convergent d'après 1.

- $\mathcal{H}_0 : (1 | 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, d'où $\mathcal{H}_0$.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie, pour $k < n$.

$$\begin{aligned} (X^{k+1} | 1) &= (k+1)(X^k | 1) && \text{D'après I.2.1} \\ &= (k+1)k! && \text{D'après } \mathcal{H}_k \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (X^k | 1) = k!$

Partie 2 (Construction d'une base orthogonale)

II.1 - Propriétés de l'application α

- 1) • Morphisme : Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1 - X)(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda X P'' + X Q'' + \lambda(1 - X)P' + (1 - X)Q' && \text{Par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda \alpha(P) + \alpha(Q) \end{aligned}$$

Donc α est linéaire.

- $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\alpha(P)$ est un polynôme et

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(P'') + 1, \deg(P') + 1) \leq \max(n - 2 + 1, n - 1 + 1) = n$$

Donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion :

$$\boxed{\alpha \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

- 2) $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \alpha(X^k) &= k(k-1)X^{k-1} + (1-X)kX^{k-1} \\ &= k^2X^{k-1} - kX^k \end{aligned}$$

Cette formule reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$, vu que les formules de dérivation sont aussi valable en $k = 0$ et $k = 1$.

Conclusion :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

- 3) La matrice de α est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. De plus, ceux-ci sont 2 à 2 distincts donc α admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes :

$$\boxed{\alpha \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}}$$

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

- 1) Comme $-k$, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, est une valeur propre de α , et $E_{-k} = \text{Ker}(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ est le sous-espace propre associé. La multiplicité m_{-k} de $-k$ est 1 (les valeurs propres sont deux à deux distinctes) et

$$1 \leq \dim E_{-k} \leq m_{-k} = 1$$

Donc

$$\boxed{\dim \text{Ker}(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = 1}$$

- 2) Les démonstration d'existence + unicité sont un classique. On commence par montrer l'unicité, en prenant deux exemplaires qui conviennent et en montrant qu'ils sont égaux, ce qui permet de manipuler les notions en jeu dans la question avant de se lancer dans l'unicité.

- Unicité : Soit P_k et Q_k qui conviennent : $P_k \in E_{-k}$ et $Q_k \in E_{-k}$, unitaires (donc non nuls). Comme $\dim E_{-k} = 1$, ils sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $P_k = \lambda Q_k$ (car non nuls). Donc ils ont même degré d ($\lambda \neq 0$) et sur les coefficients l'égalité s'écrit $a_d = \lambda b_d$ avec $a_d = b_d = 1$. Donc $\lambda = 1$: $P_k = Q_k$. Il y a unicité.
- Existence : D'après ci-dessus, $\dim E_{-k} = 1$: soit P_k une base de E_{-k} . Quitte à diviser par le coefficient dominant (non nul par définition), on peut supposer P_k unitaire, et il vérifie

$$\alpha(P_k) = -kP_k$$

D'où l'existence.

Conclusion :

Il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$

3) Notons $d = \deg P_k$. D'après la question II.2.3, $P_k = X^d + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, et

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \alpha(X^d + Q) \\ &= \alpha(X^d) + \alpha(Q) \\ &= -dX^d + d^2X^{d-1} + \alpha(Q)\end{aligned}$$

De plus $\deg(\alpha(Q)) \leq \max((\deg Q) - 2 + 1, (\deg Q) - 1 + 1) < d$.

Comme P_k est un vecteur propre pour la valeur propre $-k$, il vient

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) = -kP_k &\implies -dX^d + d^2X^{d-1} + \alpha(Q) = -k(X^d + Q) \\ &\implies -d = -k\end{aligned}\quad \text{en identifiant les coefficients de degré } d$$

Conclusion :

$$\deg P_k = k$$

Méthode : si $\deg P = d$, écrire $P = a_dX^d + Q$ avec $\deg Q < d$ (isoler le monome de plus haut degré) et remplacer dans les formules.

4) D'après II.2.3, $\deg P_k = k$. Cette question, pour k petit, était faisable en admettant la question précédente.

- $k = 0$: P_0 est de degré 0 et unitaire donc

$$P_0 = 1$$

On l'a aussi grâce au II.1.2 : $\alpha(1) = 0$ et il y a unicité de P_0 .

- $k = 1$: P_1 est de degré 1 et unitaire donc $P_1 = X + a_0$. De plus $\alpha(P_1) = 1 - X$ donc

$$\alpha(P_1) = -P_1 \implies 1 - X = -X - a_0$$

Donc $a_0 = -1$. Ainsi,

$$P_1 = X - 1$$

- $k = 2$: $P = X^2 - 4X + 2$ est unitaire, et

$$\begin{aligned}\alpha(P) &= \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + \alpha(2) \\ &= (-2X^2 + 4X) - 4(1 - X) + 0 \\ &= -2X^2 + 8X - 4 \\ &= -2P\end{aligned}$$

Donc, par unicité de P_2 ,

$$P_2 = X^2 - 4X + 2$$

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

1) D'après I.1.1 toutes les intégrales qui suivent convergent. Effectuons une intégration par partie :

$$\begin{aligned}u &= tP'(t)e^{-t} & u' &= P'(t)e^{-t} + tP''(t)e^{-t} - tP'(t)e^{-t} \\ & & &= (tP''(t) + (1-t)P'(t))e^{-t} \\ v &= Q(t) & v' &= Q'(t)\end{aligned}$$

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t} = 0$, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt &= [tP'(t)Q(t)e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))Q(t)e^{-t} dt \\ &= 0 - (\alpha(P) \mid Q)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\alpha(P) \mid Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$$

2) La formule de la question précédente appliquée à $P_1 = Q$ et $Q_1 = P$ nous donne

$$(\alpha(Q) \mid P) = - \int_0^{+\infty} t Q'(t) P'(t) e^{-t} dt$$

Donc, $(\alpha(Q) \mid P) = (\alpha(P) \mid Q)$ et par symétrie du produit scalaire

$$\boxed{(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))}$$

Donc α est un endomorphisme symétrique.

3) D'après **II.3.2**, α est un endomorphisme symétrique. Donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Or ceux-ci sont les $E_{-k} = \text{Vect}(P_k)$ d'après **II.2.2** : la famille $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est donc une famille orthogonale.

Elle est par conséquent libre¹. Or $\text{Card } \mathcal{B} = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion :

$$\boxed{(P_0, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$$

Partie 3 (Méthode de quadrature de Gauss)

1) Soit $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Supposons que Λ vérifie (*) :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$$

Montrons la relation matricielle.

Comme (*) est vraie pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, elle est en particulier vraie pour $1, X, \dots, X^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt &= (X^k \mid 1) \\ &= k! && \text{D'après I.2.2} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k && \text{D'après (*)} \end{aligned}$$

Matriciellement, cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ Supposons que Λ vérifie la relation matricielle :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = (X^k \mid 1)$$

1. cette famille est une base pour de multiples raisons : parce que c'est une famille orthogonale (donc libre), parce que c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (donc libre), parce que α est diagonalisable

et donc $E = \bigoplus_{k=0}^n E_{-k}$ (donc génératrice et libre)

Montrons (*). Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (P \mid 1) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \mid 1 \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^k \mid 1) && \text{Par bilinéarité du produit scalaire} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i x_i^k && (\text{Méthode : toujours intervertir deux } \sum) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)
 \end{aligned}$$

Donc la relation (*) est vérifiée.

Conclusion :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ vérifie (*)} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

On peut aussi considérer $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ défini par $\varphi(P) = (P \mid 1) - \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i)$. Il est nul si et seulement si il est nul sur une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. C'est une approche plus abstraite.

2) D'après le cours, la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est la matrice de Vandermonde, et son

déterminant vaut $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$: il est ici non nul puisque les (x_i) sont deux à deux distincts.

Ainsi le système $V\Lambda = \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ a une unique solution,

$$\Lambda = V^{-1} \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$$

D'après III.1,

Il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant (*)

3) Posons $P = P_n^2$. Le produit scalaire est défini positif donc

$$\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = (P_n \mid P_n) \neq 0$$

De plus les x_i sont les racines de P_n , donc

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i) = 0$$

Finalement :

Le polynôme $P = P_n^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ vérifie $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i)$

Exercice 2 (PT A 2016)

- 1) Théorème spectral : A est **symétrique réelle** donc diagonalisable dans une base orthonormée.
- 2) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
 \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\
 &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
 &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ -(x-2) & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 2 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)((x-2)^2 - 2) \\
 &= (x-2)(x-2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Parfois, les opérations sur les lignes et les colonnes n'aboutissent pas. Il faut savoir mesurer son temps : au bout de 5 minutes, si rien ne se profile : Sarrus (ou développement barbare par rapport à une colonne ou ligne comportant au moins un zéro). Ici, il y a déjà 2 zéros dans la matrice, ça va bien se passer.

$$\begin{aligned}
 \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\
 &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)^3 + 0 + 0 - 0 - 2(x-2) \\
 &= (x-2)((x-2)^2 - 2) \\
 &= (x-2)(x-2-\sqrt{2})(-2+\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont

- $\lambda = 2$ de multiplicité 1,
- $\lambda = 2 + \sqrt{2}$ de multiplicité 1,
- $\lambda = 2 - \sqrt{2}$ de multiplicité 1.

On vérifie avec la trace : $2 + 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 6 = \text{Tr}(A)$.

Base de vecteurs propres :

Tous les sous-espaces propres sont de dimension 1 car les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1.

- $E_2 = \text{Ker}(I_3 - A) : A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc, comme $\dim E_1 = 1$,

$$E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

- $E_{2+\sqrt{2}} = \text{Ker}((2 + \sqrt{2})I_3 - A) :$

$$\begin{aligned}
 X \in E_{2+\sqrt{2}} &\iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} X = 0 \\
 &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - \sqrt{2}L_1 \\
 &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ \sqrt{2}y + 2z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \quad L_2 = \sqrt{2}L_3 \\
 &\iff \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = -1/\sqrt{2}y = x \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -\sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} \\
 &\iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
 E_{2+\sqrt{2}} &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)
 \end{aligned}$$

- $E_{2-\sqrt{2}} = \text{Ker}((2 - \sqrt{2})I_3 - A)$ est orthogonal à E_2 et $E_{2+\sqrt{2}}$ donc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base de $E_{2-\sqrt{2}}$:

$$E_{2-\sqrt{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc il suffit de normer les vecteurs obtenus pour avoir une base orthonormée : Conclusion :

$$\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base orthonormée de vecteurs propres}$$

3) 0 n'est pas valeur propre, donc

La matrice A est inversible

4) Soit $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$. C'est une matrice orthogonale, car c'est une matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée. Ainsi

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base s'écrit $X = PX'$. Donc $X' = P^{-1}X = P^T X$ et

$$\begin{aligned}
 x' &= (x + z)/\sqrt{2} \\
 y' &= (x - \sqrt{2}y + z)/2 \\
 z' &= (x + \sqrt{2}y + z)/2
 \end{aligned}$$

- 5) • Dans la base canonique :

$$\begin{aligned}
 \langle Au, u \rangle &= (AX)^T X \\
 &= X^T AX \\
 &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + 2z^2}
 \end{aligned}$$

- Dans la base de vecteurs propres : avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
 \langle Au, u \rangle &= (DX')^T X' && \text{Car } \mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^3 \\
 &= \begin{pmatrix} 2x' & (2 + \sqrt{2})y' & (2 - \sqrt{2})z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
 &= \boxed{2x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 + (2 - \sqrt{2})z'^2}
 \end{aligned}$$

- 6) Dans la base $\mathcal{B}'$, on a

$$\begin{aligned}
 \langle Au, u \rangle &= 2x'^2 + (2 + \sqrt{2})y'^2 + (2 - \sqrt{2})z'^2 \\
 &\geq (2 - \sqrt{2})(x'^2 + y'^2 + z'^2) \\
 &\geq (2 - \sqrt{2})\|u\|^2 && \text{Car } \|u\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2
 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \langle Au, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2}$$

- 7) Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est un produit scalaire.

- Symétrique : Pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
 \langle u, v \rangle_A &= \langle Au, v \rangle \\
 &= \langle u, Av \rangle && \text{Car } A \text{ est symétrique} \\
 &= \langle Av, u \rangle && \text{Car } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique} \\
 &= \langle v, u \rangle_A
 \end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est symétrique.

- Bilinéaire : Soit $v \in E$ fixé. Pour tout $(u_1, u_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle_A = \langle \lambda Au_1 + Au_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle_A + \langle u_2, v \rangle_A$$

Donc $\langle \cdot, v \rangle_A$ est linéaire. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est bilinéaire.

- Positive : Pour tout $u \in E$, d'après la question 6 ($\lambda = 2 - \sqrt{2} > 0$),

$$\langle u, u \rangle_A \geq (2 - \sqrt{2})\|u\|^2 \geq 0$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est positive.

- Définie positive : Soit $u \in E$ tel que

$$\langle u, u \rangle_A = 0$$

Ainsi, on a l'encadrement : $0 \geq (2 - \sqrt{2})\|u\|^2 \geq 0$. Donc $u = 0$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie positive.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est définie positive.

Conclusion :

$\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire

Exercice 3

Partie 1 (un exemple)

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
 \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\
 &= \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
 &= \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ x & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 &= x \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & -2 & x+1 \end{vmatrix} \\
 &= x \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} \\
 &= x((x-1)(x+1) + 4) \\
 &= x(x^2 + 3)
 \end{aligned}$$

Conclusion :

La matrice A n'a qu'une valeur propre réelle, 0

2) $\langle X, Y \rangle = X^T Y$

$$\begin{aligned}
 \langle u(X), X \rangle &= (AX)^T X \\
 &= \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 & x_1 - x_3 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
 &= -x_2x_1 + x_3x_1 + x_1x_2 - x_3x_2 - x_1x_3 + x_2x_3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Ainsi,

u est un endomorphisme antisymétrique

On pouvait aussi le montrer comme en 2.3.b, en utilisant uniquement $A^T = -A$: dans ce cas, il y a moins de calculs.

3) Noyau :

Comme 0 est une valeur propre de multiplicité $\alpha_0 = 1$, et que $1 \leq \dim E_0 \leq \alpha_0 = 1$, on a $\dim \text{Ker } u = 1$.

$$\begin{aligned}
 X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } u &\iff AX = 0 \\
 &\iff \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad L_1 + L_2 + L_3 = 0 \\
 &\iff x = y = z \\
 &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \\
 &\iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker } u = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Rang : Le théorème du rang s'écrit

$$\boxed{\text{rg } u = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } u = 2}$$

4) On remarque que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Or $\text{Im } u$ est engendrée par les vecteurs colonne de la matrice A , et $\text{Ker } u = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ d'après 3).

Donc $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$. Ainsi, $\text{Ker } u \subset (\text{Im } u)^\perp$.

De plus $\dim E = 3$ finie, donc pour tout sous-espace vectoriel F , $F \oplus F^\perp = E$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } u)^\perp &= \dim E - \dim \text{Im } u \\ &= \dim \text{Ker } u \end{aligned} \quad \text{D'après le théorème du rang}$$

Donc il y a inclusion et égalité des dimension :

$$\boxed{\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp}$$

5) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre (les vecteurs ne sont pas colinéaires) de vecteurs de $\text{Im } u$ (engendrée par les vecteurs colonnes de A).

Or d'après 4), $\dim \text{Im } u = 2$. Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im } u$.

Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : soit $v = \varepsilon_2 - \lambda \varepsilon_1$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v \perp \varepsilon_1$:

$$\langle v, \varepsilon_1 \rangle = 0 = \langle \varepsilon_2 - \lambda \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle - \lambda \langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$$

$$\text{Donc } \lambda = \frac{\langle \varepsilon_2, \varepsilon_1 \rangle}{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle} = -\frac{1}{2}, \text{ puis } v = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, en normant,

$$\boxed{\text{Une base orthonormée de } \text{Im } u \text{ est } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

On pouvait aussi immédiatement utiliser que $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$, et dans ce cas le second vecteur de la base de $\text{Im } u$ peut s'obtenir par le produit vectoriel : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6) Comme $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$, on a

- $\text{Ker } u \oplus \text{Im } u = E$: la réunion d'une base de $\text{Ker } u$ et d'une base de $\text{Im } u$ sera une base de E ,

- $\text{Ker } u \perp \text{Im } u$: la réunion d'une famille orthogonale de $\text{Ker } u$ et d'une famille orthogonale de $\text{Im } u$ sera une famille orthogonale.

Ainsi,

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormée de } E$$

7)

- $u(e_1) = 0$ car $e_1 \in \text{Ker } u$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u(e_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3} e_3 \end{aligned}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad u(e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} e_2$$

Matrice de passage P (orthogonale) :
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Formule de changement de base :
$$A = P A' P^{-1}$$

Partie 2 (Généralités)

- 1) a) Le produit scalaire est bilinéaire :

$$\begin{aligned} \langle u(x+y), x+y \rangle &= \langle u(x) + u(y), x+y \rangle \\ &= \langle u(x), x+y \rangle + \langle u(y), x+y \rangle \\ &= \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle \\ &= \langle u(x), y \rangle + \langle x, u(y) \rangle \end{aligned}$$

Or u est antisymétrique, donc $\langle u(x+y), x+y \rangle = 0$. Ainsi,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

- b) Nous venons de montrer, en 1)a),

$$u \text{ est antisymétrique} \implies \text{pour tout } x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

Réciproquement : supposons que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$. En $y = x$,

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle$$

Donc $\forall x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$: u est antisymétrique. Finalement,

$$u \text{ est antisymétrique si et seulement si, pour tout } x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

- 2) • Montrons que $\text{Ker } u \subset (\text{Im } u)^\perp$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } u &\implies u(x) = 0 \\ &\implies \forall x' \in E, \langle x, u(x') \rangle = -\langle u(x), x' \rangle \quad \text{d'après 1)a)} \\ &= \langle 0, x' \rangle \quad \text{car } x \in \text{Ker } u \\ &= 0 \\ &\implies \forall y \in \text{Im } u, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\implies x \in (\text{Im } u)^\perp \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker } u \subset (\text{Im } u)^\perp$$

- Montrons que $\dim \text{Ker } u = \dim(\text{Im } u)^\perp$.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u = \dim E$.

De plus, $\dim F^\perp + \dim F = \dim E$, donc ici $\dim(\text{Im } u)^\perp + \dim \text{Im } u = \dim E$.

Par conséquent

$$\dim \text{Ker } u = \dim(\text{Im } u)^\perp$$

Conclusion : par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp}$$

3) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

- a) Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$ associés. La base $\mathcal{B}$ est une *base orthonormée* donc

$$\boxed{\langle x, y \rangle = X^T Y}$$

- b) Notons $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ Supposons u antisymétrique.

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_j) &= \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i && \text{car } \mathcal{B} \text{ est une base orthonormée} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i && \text{par définition de } a_{ij} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} &= \langle u(e_j), e_i \rangle \\ &= -\langle e_j, u(e_i) \rangle \\ &= -a_{ji} \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est antisymétrique}}$$

$\Leftarrow$ Supposons A antisymétrique : $A^T = -A$. Soit $(x, y) \in E^2$ de vecteurs colonnes associés X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} \langle u(x), y \rangle &= (AX)^T Y \\ &= -X^T A^T Y && \text{rappel : } (AB)^T = B^T A^T \\ &= -\langle x, u(y) \rangle \end{aligned}$$

Donc, d'après 1)b), u est antisymétrique.

Conclusion :

$$\boxed{u \text{ est antisymétrique si et seulement si la matrice } A \text{ de } u \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est antisymétrique}}$$

Partie 3 (Réduction)

- 1) Soit $x \neq 0$ un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

$$\boxed{\text{la seule valeur propre réelle possibles pour } u \text{ est } 0}$$

Par conséquent, si u est diagonalisable, sa matrice dans une base de diagonalisation sera la matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. C'est-à-dire la matrice nulle. Ainsi, dans ce cas, $u = 0$.

Réciproquement, l'endomorphisme $u = 0$ est bien diagonalisable et antisymétrique. Conclusion :

Un endomorphisme antisymétrique u est diagonalisable si et seulement si $u = 0$

2) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\langle s(x), y \rangle &= \langle u(u(x)), y \rangle \\ &= -\langle u(x), u(y) \rangle && \text{d'après 1)b)} \\ &= \langle x, u(u(y)) \rangle && \text{idem} \\ &= \langle x, s(y) \rangle\end{aligned}$$

Par conséquent,

L'endomorphisme $s = u \circ u$ est symétrique

3) a) Comme $x \in V_a$, $s(x) = ax$. Donc $\langle s(x), x \rangle = \langle ax, x \rangle = a\|x\|^2$.

De plus, $s = u^2$, donc par antisymétrie de u ,

$$\langle s(x), x \rangle = \langle u(u(x)), x \rangle = -\langle u(x), u(x) \rangle = -\|u(x)\|^2$$

Finalement,

$$\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$

Comme $x \neq 0$, $\|x\| \neq 0$ et donc $a = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \leq 0$. Or $a \neq 0$ par hypothèse. Ainsi,

$$a < 0$$

b) • Montrons que $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u :

$$\begin{aligned}y \in \text{Vect}(x, u(x)) &\implies \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, y = \alpha x + \beta u(x) \\ &\implies \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u(y) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) && \text{Or } u^2(x) = s(x) = ax \\ &\implies \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u(y) = \alpha u(x) + a\beta x \\ &\implies u(y) \in \text{Vect}(x, u(x))\end{aligned}$$

Donc $u(F) \subset F$, c'est-à-dire

$F = \text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u

• Montrons plus généralement que, si F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u :
Soit $y \in F^\perp$.

$$\begin{aligned}\forall z \in F, \quad \langle u(y), z \rangle &= -\langle y, u(z) \rangle && \text{Car } u \text{ antisymétrique} \\ &= 0 && \text{Car } u(z) \in F \text{ et } y \in F^\perp\end{aligned}$$

Donc $u(y) \in F^\perp$. Conclusion :

$F^\perp$ est stable par u

- Déterminons la matrice de $\tilde{u} : F \rightarrow F$ défini par $\tilde{u}(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$.

Par définition d'un endomorphisme antisymétrique, $\langle u(x), x \rangle = 0$, donc $(x, u(x))$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de $F = \text{Vect}(x, u(x))$: elle est libre. Par construction, elle est génératrice. Donc c'est une base, qui plus est orthogonale. Posons

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$$

La famille (e_1, e_2) est une base orthonormée de F .

D'après 3)a), $\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} = -a > 0$, donc $\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{-a}$.

Comme de plus $u^2(x) = s(x) = ax$,

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \frac{u(x)}{\|x\|} = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \frac{u(x)}{\|u(x)\|} = \sqrt{-a} e_2 \\ u(e_2) &= \frac{u^2(x)}{\|u(x)\|} = \frac{ax}{\|u(x)\|} = \frac{a}{\sqrt{-a}} \frac{x}{\|x\|} = -\sqrt{-a} e_1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{u}$, l'endomorphisme induit sur F par u a une matrice de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b = \sqrt{-a}}$$

dans une base orthonormée (on précisera b)

- c) Notons $p = \dim \text{Ker } u$. La matrice de u dans une base bien choisie s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -b_k \\ & & & & & & b_k & 0 \end{pmatrix}$$

On décompose E :

$$E = (\text{Ker } u) \oplus_{\perp} (\text{Ker } u)^{\perp}$$

Puis on considère $u_1 : (\text{Ker } u)^{\perp} \rightarrow (\text{Ker } u)^{\perp}$ la restriction de u , qui est bijective, et $s_1 = u_1^2$ qui est aussi bijective ($\det s_1 = \det u_1^2 > 0$).

Nous avons prouvé à la question précédente que l'on peut trouver un sous-espace vectoriel F de dimension 2 stable par u_1 et une base orthonormée $\mathcal{B}_F$ de F telle que la matrice de la restriction de u_1 à F dans cette base soit

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad b > 0$$

De plus $F^{\perp}$ stable par u_1 , donc $u_2 : F^{\perp} \rightarrow F^{\perp}$ est aussi antisymétrique, inversible, et $\dim F^{\perp} < \dim(\text{Ker } u)^{\perp}$: on peut appliquer l'hypothèse de récurrence (à détailler proprement).

FIN DE L'ÉPREUVE