

Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 1 (Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$)

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

- 1) Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
- 2) Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

- 1) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

- 2) Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie 2 (Construction d'une base orthogonale)

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

- 1) Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Écrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.
- 3) En déduire que α est diagonalisable et que $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

II.2 - Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- 1) Quelle est la dimension de $\text{Ker}(\alpha + k \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?

- 2) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
- 3) Justifier que P_k est de degré k .
- 4) Déterminer P_0 et P_1 . Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- 1) Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
- 2) En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
- 3) Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On pourra utiliser **II.2.2** et **II.3.2**.

Partie 3 (Méthode de quadrature de Gauss)

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \dots, x_n$.

On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

- 1) Montrer qu'un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

- 2) En déduire qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$
- 3) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=0}^n \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2

$E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note $\mathcal{B}$ la base canonique.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1) Sans calcul, montrer que la matrice A est diagonalisable.
- 2) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de E .
- 3) La matrice A est-elle inversible?
- 4) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.
- 5) Calculer $\langle Au, u \rangle$ en fonction de (x, y, z) , puis en fonction de (x', y', z') .
- 6) Soit λ la plus petite valeur propre de A . Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2$.
- 7) Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on pose $(u, v)_A = \langle Au, v \rangle$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit antisymétrique si

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite antisymétrique si $A^T = -A$.

Partie 1 (un exemple)

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, muni du produit scalaire canonique

$$\forall \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) \in E^2, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

L'endomorphisme u de E est défini par $u(X) = AX$ pour tout $X \in E$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres réelles de A .
- 2) Rappeler l'expression matricielle du produit scalaire $\langle X, Y \rangle$, où $(X, Y) \in E^2$. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique.
- 3) Déterminer $\text{Ker } u$ et en déduire le rang de u .
- 4) Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$.
- 5) Déterminer une base orthonormée de $\text{Im } u$.
- 6) On note e_1 un vecteur unitaire de $\text{Ker } u$ et (e_2, e_3) une base orthonormée de $\text{Im } u$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E .
- 7) Donner la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et la formule reliant A , A' et P .

Partie 2 (Généralités)

Désormais, E est un espace vectoriel euclidien quelconque, de dimension n . Soit u un endomorphisme de E .

- 1) a) On suppose u antisymétrique. En considérant le vecteur $x + y$, établir que, pour tout $x, y \in E$,

$$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

b) En déduire que u est antisymétrique si et seulement si, pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.

- 2) On suppose u antisymétrique. Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$.
- 3) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .
 - a) Soit $(x, y) \in E^2$ et X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathcal{B}$ associés. Rappelez l'expression matricielle du produit scalaire $\langle x, y \rangle$ à l'aide de X et Y .
 - b) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si la matrice A de u dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.

Partie 3 (Réduction)

Désormais, $u \in \mathcal{L}(E)$ est supposé antisymétrique.

- 1) Quelles sont les seules valeurs propres réelles possibles pour u ?
À quelle condition un endomorphisme antisymétrique est-il diagonalisable?
- 2) Montrer que l'endomorphisme $s = u \circ u$ est symétrique.
- 3) Soit a l'une des valeurs propres non nulle de s (s'il en existe) et V_a le sous-espace propre associé.

a) Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$. Montrer que

$$\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$$

et en déduire que $a < 0$.

b) On considère toujours $x \in V_a \setminus \{0_E\}$

Montrer que $F = \text{Vect}(x, u(x))$ et $F^\perp$ sont stables par u .

Montrer que l'endomorphisme induit sur F par u a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée (on précisera b)

c) En déduire une matrice réduite de u dans une base bien choisie.

FIN DE L'ÉPREUVE