Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (CCP TPC 2018)

Partie 1

1) Calculons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 5 & -2 \\ -2 & x+4 & -2 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$

$$= \begin{vmatrix} x-3 & 5 & -2 \\ -x+1 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x-3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

$$= (x-1)\left|\begin{array}{cc|c} x-3 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & x \end{array}\right| \quad \text{(Triangulaire par blocs)}$$

$$= x(x-1)\begin{vmatrix} x-3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$$

$$= x(x-1)\begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(x-1)(x+2)$$

Conclusion :

$$\boxed{\chi_A(x) = x(x-1)(x+2)}$$

Valeurs propres :

- $\lambda = 0$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = 1$ de multiplicité $\alpha = 1$
- $\lambda = -2$ de multiplicité $\alpha = 1$

Vous avez bien sûr vérifié avec la trace : $\mathrm{Tr}\ A = -1 = 0 + 1 - 2$.

2) La matrice A admet $n = 3$ valeurs propres distinctes, de multiplicité 1, donc

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable}}$$

3) Calcul de $E_0 = \mathrm{Ker}\ A$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \iff AX = 0$$

$$\iff \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 3x - 5y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = y = x \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

Si on préfère le raisonnement au calcul, on peut remarquer (au pif) que $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$. *Donc* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in E_0$.
Or la multiplicité de $\lambda = 0$ *dans le polynôme caractéristique est* $\alpha = 1$, *donc* $1 \leqslant \dim E_0 \leqslant \alpha = 1$. *Ainsi* $\dim E_0 = 1$. *Donc* $E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Il faut bien sûr justifier bien proprement la dimension de E_λ.
Toujours en testant des X *simples, on remarque que* $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ *donc de même* $E_{-2} = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

<u>Calcul de $E_1 = \text{Ker}\,(I_3 - A)$</u> :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 &\iff (I_3 - A)X = 0 \\
&\iff \begin{cases} -2x + 5y - 2z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -2x + 5y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 5y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

Vous pouvez toujours vérifier que $AX = \lambda X$, *pour vérifier vos calculs.*

<u>Calcul de $E_{-2} = \text{Ker}\,(-2I_3 - A)$</u> :

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 &\iff (I_3 - A)X = 0 & (L_1 \leftrightarrow L_3) \\
&\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -5x + 5y - 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \\ -2x + 2y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -12z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \\
&\iff X \in \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{E_{-2} = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

Finalement, comme $\mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_1 \oplus E_{-2}$,

$$\boxed{\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

4) *Les matrices D et P dépendent de votre choix de $\mathscr{B}'$, et en particulier de l'ordre des vecteurs – et donc des valeurs propres dans D.*

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A = PDP^{-1}}$$

5) *Dans la joie et l'enthousiasme, en route pour un pivot de Gauss. Donc : à l'aide d'opérations sur les lignes, mise sous forme triangulaire puis remontée de pivot.*

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \qquad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 + L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Conclusion :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

Vérifiez les derniers coefficients en bas à droite du produit PP^{-1}.

Partie 2 (Application aux équations différentielles) **1)** $\boxed{X' = AX}$ avec la matrice A de la partie 1.

2) $\boxed{X = PX_1}$

3) Dans la base $\mathscr{B}'$, le système s'écrit $X_1' = DX_1$, c'est-à-dire

$$(S') \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 0 \\ y_1'(t) & = & y_1(t) \\ z_1'(t) & = & -2z_1(t) \end{array} \right.$$

Ce système a pour solutions :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & C_1 \\ y_1(t) & = & C_2 e^t \\ z_1(t) & = & C_3 e^{-2t} \end{array} \right.$$

où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ dépendent des conditions initiales. D'après le résultat de la question 2, la formule de changement de base nous donne $X = PX_1$, donc

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = C_1 - C_2 e^t + C_3 e^{-2t} \\ y(t) = C_1 + C_3 e^{2t} \\ z(t) = C_1 + C_2 e^t \end{array}}$$

De plus $X_1 = P^{-1}X$, donc
$$X_1(0) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Par conséquent $C_1 = 3$, $C_2 = -1$ et $C_3 = -3$.
$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = 3 + e^t - 3e^{-2t} \\ y(t) = 3 - 3e^{2t} \\ z(t) = 3 - e^t \end{array}}$$

Partie 3 (Autre application)
Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit
$$\mathscr{C}_k = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = kMA\}$$

1) Par définition, $\mathscr{C}_k \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrons que $\mathscr{C}_k$ est non vide :
$$A0 = 0 = k0A$$
Donc $0 \in \mathscr{C}_k$, par conséquent $\mathscr{C}_k \neq \emptyset$.
Montrons que $\mathscr{C}_k$ est stable par combinaison linéaire : Soit $M, N \in \mathscr{C}_k^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda kMA + kNA && \text{Car } M \text{ et } N \in \mathscr{C}_k \\ &= k(\lambda M + N)A \end{aligned}$$
Donc $\lambda M + N \in \mathscr{C}_k$.
Donc $\mathscr{C}_k$ est stable par combinaison linéaire.
Finalement,
$$\boxed{\mathscr{C}_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
On pouvait aussi poser $\varphi : M \mapsto AM - kMA$ et prouver que φ était linaire. Alors $\mathscr{C}_k = \operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-espace vectoriel.

2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $AM = kMA$. Montrons que $DM' = kM'D$.
En multipliant par P^{-1} et P, il vient $M' = P^{-1}MP$ et $D = P^{-1}AP$.
$$\begin{aligned} DM' &= P^{-1}APP^{-1}MP \\ &= P^{-1}AMP \\ &= kP^{-1}MAP && \text{Car } AM = kMA \\ &= kP^{-1}PM'P^{-1}PDP^{-1}P && \text{Car } M = PM'P^{-1} \text{ et } A = PDP^{-1} \\ &= kM'D \end{aligned}$$
Donc $DM' = kM'D$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $DM' = kM'D$.
$$\begin{aligned} AM &= PDP^{-1}PM'P^{-1} \\ &= PDM'P^{-1} \\ &= kPM'DP^{-1} && \text{Car } DM' = kM'D \\ &= kMA \end{aligned}$$
Donc $AM = kMA$.
$$\boxed{AM = kMA \iff DM' = kM'D}$$

3) **a)** Dans toute la suite de la question on pose $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

$$DM' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ -2c & -2c' & -2c'' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M'D = \begin{pmatrix} 0 & a' & -2a'' \\ 0 & b' & -2b'' \\ 0 & c' & -2c'' \end{pmatrix}$$

On remarque que multiplier M' à droite par D revient à faire une opération sur les colonnes – et donc, en transposant, multiplier à gauche par D revient à faire une opération sur les lignes.

<u>$k = 0$</u> :

$$\begin{aligned} M' \in \mathscr{C}'_0 &\iff DM' = 0 \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ b' = 0 \\ b'' = 0 \\ -2c = 0 \\ -2c' = 0 \\ -2c'' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a'' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M' \in \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{13}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{C}'_0 = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{13})}$$

<u>$k = 1$</u> :

$$\begin{aligned} M' \in \mathscr{C}'_1 &\iff DM' = M'D \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ -2c & -2c' & -2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a' & -2a'' \\ 0 & b' & -2b'' \\ 0 & c' & -2c'' \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a' = a'' = 0 \\ b = c = 0 \\ b' = b' \\ b'' = -2b'' \\ -2c' = c' \\ -2c'' = -2c'' \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \\ & = aE_{11} + b'E_{22} + c''E_{33} \\ &\iff M' \in \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{13}) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{C}'_1 = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33})}$$

On peut montrer que si D est diagonale de taille n avec n valeurs propres 2 à 2 distinctes, alors son commutant est l'ensemble des matrices diagonales.

<u>$k = -2$</u> :

$$M' \in \mathscr{C}'_{-2} \iff DM' = -2M'D$$
$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ -2c & -2c' & -2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2a' & 4a'' \\ 0 & -2b' & 4b'' \\ 0 & -2c' & 4c'' \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a' = a'' = b = c = 0 \\ b' = -2b' \\ b'' = 4b'' \\ -2c' = -2c' \\ -2c'' = 4c'' \end{cases}$$

$$\iff M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + c'E_{32}$$
$$\iff M' \in \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{32})$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{C}'_{-2} = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{32})}$$

<u>$k = -2$</u> :

$$M' \in \mathscr{C}'_{-2} \iff DM' = -2M'D$$
$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & b' & b'' \\ -2c & -2c' & -2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a' & 2a'' \\ 0 & -b' & 2b'' \\ 0 & -c' & 2c'' \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a' = a'' = b = c = 0 \\ b' = -b' \\ b'' = 2b'' \\ -2c' = -c' \\ -2c'' = 2c'' \end{cases}$$

$$\iff M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff M' \in \operatorname{Vect}(E_{11})$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{C}'_{-1} = \operatorname{Vect}(E_{11})}$$

b) Utilisons le 2) :

$$M \in \mathscr{C}_k \iff M' \in \mathscr{C}'_k$$

L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ M' \longmapsto PM'P^{-1} \end{cases}$$

est un isomorphisme (d'inverse $M \mapsto P^{-1}MP$). D'après ci-dessus $\varphi(\mathscr{C}'_k) = C_k$.
Soit $\widetilde{\varphi} : \mathscr{C}'_k \to \mathscr{C}_k$ l'isomorphisme induit par φ. $\widetilde{\varphi}$ transformera une base de $\mathscr{C}'_k$ en une base de $\mathscr{C}_k$.

- <u>$k = 1$</u> D'après a), (E_{11}, E_{22}, E_{33}) est une base de $\mathscr{C}'_1$, donc $(\varphi(E_{11}), \varphi(E_{22}), \varphi(E_{33}))$ est une base de $\mathscr{C}_1$.

$$\varphi(E_{11}) = PE_{11}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \varphi(E_{33}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Une base de } \mathscr{C}_1 \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}$$

- $\underline{k=-1}$ D'après a), (E_{11}) est une base de $\mathscr{C}_{-1}$. Donc

$$\boxed{\text{Une base de } \mathscr{C}_1 \text{ est } \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 2 (Essec ECS 2011)

Partie 1 (Préliminaires)

1) Montrons que $C(U)$ est non vide :
Soit $0 \in \mathscr{L}(E)$, $\forall u \in U,\ u \circ 0 = 0 = 0 \circ u$. Ainsi $0 \in C(U)$, qui est donc non vide.
Montrons que $C(U)$ est stable par combinaison linéaire : Soit $(v_1, v_2) \in C(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llcll} \forall u \in U, & u \circ (\lambda v_1 + v_2) & = & \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 & (u \text{ est linéaire}) \\ & & = & \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u & (v_i \in C(U)) \\ & & = & (\lambda v_1 + v_2) \circ u & \end{array}$$

Donc $\lambda v_1 + v_2 \in C(U)$.
Conclusion : $\boxed{C(U) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E).}$
De plus $\mathrm{id}_E \in C(U)$, donc $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}_E) \subset C(U)$, puis $\dim\big(\mathrm{Vect}\,(\mathrm{id}_E)\big) \leqslant \dim C(U)$.
Ainsi $\boxed{\dim C(U) \geqslant 1}$

2) Soit $P(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$\begin{aligned} u \circ P(u) &= u \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k u^{k+1} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\Big) \circ u \\ &= P(u) \circ u \end{aligned}$$

Donc $P(u) \in C(u)$.
Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(u)}$

3) Soit $v \in C(u)$.

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\Longrightarrow u(x) = \lambda x \\ &\Longrightarrow v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x) \\ &\Longrightarrow v(u(x)) = \lambda v(x) && (\text{car } v \in C(u)) \\ &\Longrightarrow v(x) \in E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)}$
Vu en exercice dans la feuille d'algèbre linéaire.

4) Remarquons que $u \in C(u)$ (cas particulier de 2), ou calcul immédiat).

$$\begin{aligned} w \in C(C(u)) &\Longrightarrow \forall v \in C(u),\ v \circ w = w \circ v \\ &\Longrightarrow u \circ w = w \circ u && (\text{pour } v = u \in C(u)) \\ &\Longrightarrow w \in C(u) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{C(C(u)) \subset C(u)}$

Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $v \in C(u)$, alors $u^k \circ v = v \circ u^k$. Soit $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k \in \mathbb{R}[u]$.

$$\begin{aligned}
\forall v \in C(u), \quad v \circ P(u) &= v \circ \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \Big) \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k (v \circ u^k) \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k (u^k \circ v) && \text{(remarque ci-dessus)} \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k \Big) \circ v \\
&= P(u) \circ v
\end{aligned}$$

Donc $P(u) \in C(C(u))$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[u] \subset C(C(u))}$

Partie 2 (Étude d'un exemple)

1) **a)** F est le noyau de l'endomorphisme $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n)_{n\geqslant 0}$ de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Cette application est linéaire car le « shift » $(a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (a_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est linéaire.

Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

On peut aussi classiquement montrer que F est non vide car la suite nulle est dedans, et qu'il est stable par combinaison linéaire.

b) Soit $(a_n) = (a_0 q^n)$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On suppose $a_0 \neq 0$ et $q \neq 0$.

Comme F est un sous-espace vectoriel, on pouvait se contenter d'étudier (q^n) : si $(q^n) \in F$, alors $\lambda(q^n) \in F$.

$$(a_n) \in F \iff 2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$$

Or le polynôme $2x^3 + 3x^2 - 1$ a pour racine évidente $x = -1$. Factorisons par $(x+1)$:

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = (2x^2 + x - 1)(x+1) = (2x-1)(x+1)^2$$

Les valeurs possibles de q sont donc -1 et $1/2$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les suites géométriques de } F \text{ sont de raison } 1/2 \text{ et } -1.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n &= 2(n+3)(-1)^{n+3} + 3(n+2)(-1)^{n+2} - n(-1)^n \\
&= (-1)^n \Big(-2(n+3) + 3(n+2) - n \Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{(\gamma_n) \in F}$.

c) L'application $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à un triplet (a_0, a_1, a_2) associe la suite récurrente (a_n) de premiers termes a_0, a_1, a_2 et définie par $a_{n+3} = -\dfrac{1}{2}(3a_{n+2} - a_n)$ est injective et d'image F.

Injectivité : si $(a_n) = \varphi((a_0, a_1, a_2)) = (0)$, alors en particulier $(a_0, a_1, a_2) = (0, 0, 0)$.

(On note (0) la suite nulle, qui vaut 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$).

De plus, $\operatorname{Im} \varphi = F$ par construction.

Donc, par le théorème du rang, $\boxed{\dim F = \dim \mathbb{R}^3 = 3}$.

Montrons que la famille $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est libre : Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\lambda_1(\alpha_n) + \lambda_2(\beta_n) + \lambda_3(\gamma_n) = 0$$

En $n=0$, 1 et 2 cette égalité nous donne $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \dfrac{\lambda_1}{4} + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$

En résolvant ce système, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(On pouvait aussi calculer le déterminant de la matrice sous-jacente, qui vaut $9/4 \neq 0$)

Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Or $\dim F = 3 = \mathrm{Card}\,\mathscr{B}$, donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } F.}$

2) a) Soit $(a_n) \in F$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$, et en posant $n = p+1$ il vient

$$2a_{p+1+3} + 3a_{p+1+2} - a_{p+1} = 0 = 2b_{p+3} + 3b_{p+2} - b_p$$

Donc $(b_n) = u((a_n)) \in F$.

L'application u est linéaire : $u(\lambda(a_n) + (a'_n)) = u((\lambda a_n + a'_n)) = (\lambda a_{n+1} + a'_{n+1}) = \lambda u((a_n)) + u((a'_n))$.

Conclusion : $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } F.}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$. C'est le décalage de k termes vers la gauche.

c) Posons $\boxed{P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1}$. Alors, pour tout $(a_n) \in F$,

$$P(u)((a_n)) = (2u^3 + 3u^2 - \mathrm{id}_F)((a_n)) = (2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n) = (0)$$

(On note (0) la suite nulle, qui vaut 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Ainsi $P(u) = 0$.

d) Notons $u((a_n))_n$ le n-ième terme de la suite $u((a_n))$.

- $u((\alpha_n))_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^n}$ donc $u((\alpha_n)) = \dfrac{1}{2}(\alpha_n)$.
- $u((\beta_n))_n = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$ donc $u((\beta_n)) = -(\beta_n)$
- $u((\gamma_n))_n = (n+1)(-1)^{n+1} = -n(-1)^n - (-1)^n$ donc $u((\gamma_n)) = -(\gamma_n) - (\beta_n)$

En conclusion, $\begin{cases} u((\alpha_n)) = \dfrac{1}{2}(\alpha_n) \\ u((\beta_n)) = -(\beta_n) \\ u((\gamma_n)) = -(\beta_n) - (\gamma_n) \end{cases}$

Ainsi, matriciellement, $\boxed{T = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} u((\alpha_n)) & u((\beta_n)) & u((\gamma_n)) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (\alpha_n) \\ (\beta_n) \\ (\gamma_n) \end{matrix} \end{array}}$

Une récurrence (à faire) nous donne $\boxed{T^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Toujours **vérifier** *ses calculs : ici pour $k=0$ (on trouve $T^0 = I_3$: OK !) et $k=1$ ($T^1 = T$: OK !).*

Ici, on peut aussi calculer directement $T^k = \mathrm{Mat}\,(u^k, \mathscr{B})$ comme on a calculer T. Les calculs sont exactement du même type que ceux de T.

3) a) Soit $v \in C(u)$. Notons $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Matriciellement, $u \circ v = v \circ u$ s'écrit

$$T \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & b/2 & c/2 \\ -d-g & -e-h & -f-i \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/2 & -b & -b-c \\ d/2 & -e & -e-f \\ g/2 & -h & -h-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} T$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} a/2 &= a/2 \\ -d-g &= d/2 \\ -g &= g/2 \\ b/2 &= -b \\ -e &= -e-h \\ -h &= -h \\ c/2 &= -b-c \\ -f-i &= -e-f \\ -i &= -h-i \end{cases} \iff \begin{cases} 0 &= 0 \\ d &= 0 \\ g &= 0 \\ b &= 0 \\ h &= 0 \\ 0 &= 0 \\ c &= 0 \\ i &= e \\ 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d &= 0 \\ g &= 0 \\ b &= 0 \\ h &= 0 \\ c &= 0 \\ i &= e = \mu \\ a &= \lambda \\ f &= \delta \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.}$

b) Réciproquement : soit $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

D'après ci-dessus (ce sont des équivalences), $v \in C(u)$.

c) D'après a) et b), l'application linéaire $v \mapsto \text{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est une bijection de $C(u)$ (espace vectoriel d'après 1.1) dans $\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\lambda, \mu, \delta) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Or ce dernier espace vectoriel est de dimension 3. Ainsi, $\boxed{\dim(C(u)) = 3}$.

d) Montrons que (I_3, T, T^2) est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bT + cT^2 = 0$.

$$aI_3 + bT + cT^2 = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} & 0 & 0 \\ 0 & a - b + c & -b + 2c \\ 0 & 0 & a - b + c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} &= 0 \\ a - b + c &= 0 \\ -b + 2c &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne $a = b = c = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\text{id}_E, u, u^2) \text{ est libre dans } \mathscr{L}(F).}$

e) D'après 1.2, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. D'après 2.3)c), $\dim C(u) = 3$. Donc $\mathbb{R}[u]$ est de dimension finie comme sous-espace vectoriel de $C(u)$, et d'après 2.3)d) $\dim \mathbb{R}[u] \geqslant 3$. Ainsi,

$$3 \leqslant \dim \mathbb{R}[u] \leqslant \dim C(u) = 3$$

Donc $\dim \mathbb{R}[u] = \dim C(u)$. Or ces deux espaces sont inclus l'un dans l'autre : $\boxed{C(u) = \mathbb{R}[u]}$

Partie 3 (Second exemple)

1) a) Soit $x \in E$. $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = (u + u^3)(x) = 0$. Donc $x + u^2(x) \in \text{Ker}\ u$.
$(u^2 + \text{id}_E)(u^2(x)) = u^4(x) + u^2(x) = u((u^3 + u)(x)) = u(0) = 0$. Donc $u^2(x) \in \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in E \qquad x + u^2(x) \in \text{Ker}\ u \quad \text{et} \quad u^2(x) \in \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)}$.

Montrons que $E \subset \text{Ker}\,(u) + \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)$: Soit $x \in E$. D'après ci-dessus,

$$x = \underbrace{(x + u^2(x))}_{\in \text{Ker}\,(u)} + \underbrace{(-u^2(x))}_{\in \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)}$$

Donc $x \in \text{Ker}\,(u) + \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)$

Conclusion : $\boxed{E = \text{Ker}\,(u) + \text{Ker}\,(u^2 + \text{id}_E)}$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$: $u(x) = 0$ et $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = 0$.
Or $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = u^2(x) + x = x$. Ainsi $x = 0$.
Donc $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) = \{0\}$.
De plus, d'après a), $E = \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$. Conclusion : $\boxed{E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)}$

2) **a)** Soit $x \in F$. Montrons que $u(x) \in F$:

$$(u^2 + \operatorname{id}_E)(u(x)) = u^3(x) + u(x) = 0$$

Donc $u(x) \in F$. Ainsi, $\boxed{F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E) \text{ est stable par } u.}$

(On vient en fait de montrer que $u(E) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$, ce qui est plus fort que $u(F) \subset \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)$)

b) Soit $x \in F$. Par définition, $(u^2 + \operatorname{id}_E)(x) = u^2(x) + x = 0$. Donc $v^2(x) = u^2(x) = -x$.
Ce qui signifie : $\boxed{v^2 = -\operatorname{id}_F}$

c) Comme $v^2 = -\operatorname{id}_F$, $\det(v^2) = \det(-\operatorname{id}_F) = (-1)^{\dim F}$. Or $\det(v^2) = (\det v)^2 > 0$.
Donc $\dim F$ est pair. Comme $F \subset E$, il nous reste deux possibilités : 0 ou 2.
Si $\dim F = 0$, alors $F = \{0\}$. Or $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$ d'après 1)b)). Donc, dans ce cas, $E = \operatorname{Ker} u$, ce qui signifie $u = 0$. D'après l'énoncé, on a supposé $u \neq 0$.
Ainsi, $\boxed{\dim(F) = 2}$

d) D'après 1)b)), $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$, donc en passant aux dimensions $3 = \dim \operatorname{Ker} u + \dim F$.
Par conséquent $\boxed{\dim \operatorname{Ker} u = 1}$ et $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$: $\boxed{u \text{ n'est pas injectif.}}$

3) **a)** Montrons que (e_2, e_3) est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha e_2 + \beta e_3 = 0$$

Comme $u(e_2) = e_3$ et $u(e_3) = u^2(e_3) = -e_2$ (on est dans F), il vient $u(\alpha e_2 + \beta e_3) = \alpha e_3 - \beta e_2 = 0$.

Or $\left\{\begin{array}{rcll} \alpha e_2 + \beta e_3 & = & 0 & (\times \beta) \\ -\beta e_2 + \alpha e_3 & = & 0 & (\times \alpha) \end{array}\right. \Longrightarrow (\beta^2 + \alpha^2) e_3 = 0.$

Comme $(\operatorname{Ker} u) \cap F = \{0\}$ (1)b)), $e_3 = u(e_2) \neq 0$, par conséquent $\beta^2 + \alpha^2 = 0$.
Finalement, $\alpha = \beta = 0$: la famille (e_2, e_3) est libre.
De plus, $\dim F = 2$, donc $\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base de } F.}$

b) (e_1) est une base de $\operatorname{Ker} u$, (e_2, e_3) est une base de F (3)a)) et $E = \operatorname{Ker} u \oplus F$ (1)b)) donc

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } E.}$$

On a $\left\{\begin{array}{rcll} u(e_1) & = & 0 & (\text{car } e_1 \in \operatorname{Ker} u) \\ u(e_2) & = & e_3 & (\text{par définition de } e_3) \\ u(e_3) & = & u^2(e_2) = -e_2 & (\text{car } e_2 \in F = \operatorname{Ker}(u^2 + \operatorname{id}_E)) \end{array}\right.$ Donc

$$\boxed{A = \operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) La matrice A est diagonale bloc. Étudions le bloc $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$B^2 = -I_2$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^{2n} = (B^2)^n = (-1)^n I_2$ et $B^{2n+1} = B^{2n} B = (-1)^n B$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A^{2n+1} = (-1)^n A}$

(Comme $u^3 = -u$, on pouvait en déduire $u^{2n+1} = (-1)^n u$)

4) **a)** Soit $B = \mathrm{Mat}(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, où $v \in C(u)$. On procède comme au 2.3)a)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} = BA$$

Puis, $\left\{\begin{array}{rcl} -g & = & 0 \\ d & = & 0 \\ 0 & = & c \\ -h & = & f \\ e & = & i \\ 0 & = & -b \\ -i & = & -e \\ f & = & -h \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} g & = & 0 \\ d & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b & = & 0 \\ i & = & e \\ h & = & -f \end{array}\right.$ Conclusion : $\boxed{B \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}.}$

b) De même qu'en 2.3)c), $\boxed{\dim C(u) = 3}$

c) Montrons que (I_3, A, A^2) est une famille libre. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aI_3 + bA + cA^2 = 0$.

$$aI_3 + bA + cA^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-c & -b \\ 0 & b & a-c \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ a-c & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $a = b = c = 0$. Donc la famille (id_E, u, u^2) est libre, dans $C(u)$ de dimension 3 (d'après b)).

Conclusion : $\boxed{(\mathrm{id}_E, u, u^2) \text{ est une base de } C(u).}$

Exercice 3 (E3A PSI 2018)

1)
```
def maxi(L):
    """Prend en argument une liste *non vide*"""
    m = L[0]
    for x in L[1:]:
        if x > m:
            m = x
    return m
```

2)
```
def ind(L):
    Lindi = []
    for i in range(len(L)):
        if L[i] != 0:
            Lindi.append(i)
    return Lindi
```

3)
```
def nb_oc(L):
    m = maxi(L)+1
    T = [0] * m
    for x in L:
        T[x] += 1
    return T
```

4) **a)** La fonction `maxi` parcourt une fois la liste `L`, puis la boucle **for** la parcourt une seconde fois. Donc finalement,

$$\boxed{n = 2}$$

On peut éventuellement écrire une boucle **for** k **in** `range(m)`, *et pour chaque valeur de* k *chercher le nombre d'occurrences de* k *dans* L *en parcourant tout* L*. Dans ce cas,* $n = M$ *– et la complexité est mauvaise.*

b) —

5) **a)**

$$L_1 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0] \qquad \text{(il y a 1 « 4 », 3 « 3 », 2 « 2 », 3 « 1 », 1 « 0 ».)}$$
$$L_2 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0] \qquad \text{(idem)}$$
$$L_3 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0] \qquad \text{(idem)}$$

Nous venons donc de prouver que si $L_n = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]$, alors $L_{n+1} = L_n$.
Donc par une récurrence simple

$$L_{2018} = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]$$

b) La liste B n'est pas correctement ordonnée (les « 1 » apparaissent avant le « 2 »), donc ce n'est pas une liste L_1 possible. Soit on se contente de mentionner ce fait, donc il n'y a pas de L_0 possible. Soit on rectifie (puisqu'on doit « supposer que $L_1 = B$ ») et on part de $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$.
Dans L_0, il y a deux 4, un 1, un 2 :

$$4,4,1,2$$

Donc les listes L_0 possibles sont les permutations des nombres qui précèdent, en enlevant les doublons. Comme toujours dans le dénombrement, il faut être méthodique : quels sont les choix possibles pour la première case – les lister –, quels sont les choix restant pour la seconde case, sachant la première case, etc.

$$\boxed{\begin{array}{llllll} [4,4,1,2], & [4,4,2,1], & [4,2,4,1], & [4,2,1,4], & [4,1,4,2], & [4,1,2,4], \\ [2,4,4,1], & [2,4,1,4], & [2,1,4,4], & & & \\ [1,4,4,2], & [1,4,2,4], & [1,2,4,4] & & & \end{array}}$$

c) Il y a 2 « 4 » et 1 « 0 » : $4,4,0$. Les listes L_0 possibles sont donc :

$$[4,4,0], \qquad [4,0,4] \quad \text{et} \quad [0,4,4]$$

d) Une version récursive.

```python
def rob(A, n):
    if n == 0:
        return A
    T = nb_oc(A)
    I = ind(T)
    L1 = []
    for i in I[::-1]:
        L1.append(T[i])
        L1.append(i)
    return rob(L1, n-1)
```

FIN DE L'ÉPREUVE