Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 17 décembre 2018

Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie 1

1) Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que leur multiplicité.

2) Montrer que la matrice A est diagonalisable sans calculer les sous-espaces propres.

3) Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de vecteurs propres de A.

4) On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}'$, et D la matrice diagonale associée. Donner P et D, et rappeler la formule de changement de base.

5) Déterminer P^{-1}.

Partie 2 (Application aux équations différentielles)

On considère le système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 3x(t) - 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{array} \right. \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

1) Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Écrire le système (S) sous forme matricielle.

2) Notons $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des coordonnées de X dans la base $\mathscr{B}'$. Rappeler une formule liant X et X_1.

3) Résoudre (S) avec comme conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 2$.

Partie 3 (Autre application)

Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mathscr{C}_k = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ \mid \ AM = kMA\}$$

1) Soit $k \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et $M' \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$. Montrer que

$$AM = kMA \iff DM' = kM'D$$

3) Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit $\mathscr{C}'_k = \{M' \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid DM' = kM'D\}$. On admet que $\mathscr{C}'_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

  a) Déterminer une base de chacun des sous-espaces suivants : $\mathscr{C}'_0$, $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{C}'_{-2}$ et $\mathscr{C}'_{-1}$.

  b) Déterminer une base de $\mathscr{C}_1$ et une base de $\mathscr{C}_{-1}$.

Exercice 2

Si U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, c'est-à-dire

$$C(U) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid \forall u \in U,\, u \circ v = v \circ u\}$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est noté $C(u)$ et appelé aussi le commutant de u. On a donc

$$C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit $P = a_0 + a_1X + \ldots a_dX^d = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_kX^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1u + \ldots a_du^d = \sum_{k=0}^{d} a_ku^k$$

Où $u^k = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (k fois). Enfin on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.
L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie 1 (Préliminaires)

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \in \mathbb{N}^*$; U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.

2) Montrer que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.

3) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et E_λ le sous-espace propre de u pour la valeur propre λ. Montrer que E_λ est stable par $v \in C(u)$. (c'est-à-dire que $v(E_\lambda) \subset E_\lambda$).

4) Vérifier que $C(C(u)) \subset C(u)$, puis que $C(C(u))$ contient $\mathbb{R}[u]$.

Partie 2 (Étude d'un exemple)

Dans toute cette partie, on note : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles,

$$F = \Big\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\ 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0\Big\}$$

Et $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\beta_n = (-1)^n$, $\gamma_n = n(-1)^n$.

1) Étude de F :

  a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

  b) Déterminer les suites géométriques appartenant à F. Vérifier que $(\gamma_n) \in F$.

  c) Montrer que $\dim F = 3$. En déduire que $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est une base de F.

2) Soit u l'application définie pour $(a_n) \in F$ par $u((a_n)) = (b_n)$ avec $b_n = a_{n+1}$. (l'application u décale les termes de la suite vers la gauche).

  a) Montrer que u est un endomorphisme de F.

  b) Déterminer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que $P(u) = 0$.

d) Montrer, en justifiant soigneusement, que la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$ de la question 1 est $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Centre de u.

a) Soit $v \in C(u)$. Montrer que $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

b) Réciproquement, si $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, vérifier que $v \in C(u)$.

c) Que vaut $\dim(C(u))$?

d) Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $\mathscr{L}(F)$.

e) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie 3 (second exemple)

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u^3 + u = 0$$

1) **a)** Montrer que : $\forall x \in E$, $x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}\, u$ et $u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.
En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

b) Monter que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

2) **a)** Montrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$ est stable par u.

b) On note v la restriction de u à F. Montrer que $v^2 = -\mathrm{id}_F$.

c) En calculant $\det(v^2)$ de deux façons, prouver que $\dim(F) = 2$.

d) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et que u n'est pas injectif.

3) Soit e_1 une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et e_2 un élément non nul de F. On pose $e_3 = u(e_2)$.

a) Montrer que (e_2, e_3) est une base de F.

b) En déduire que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Quelle est la matrice A de u dans cette base ?

c) Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

4) Centre de u.

a) Soit $B = \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$, où $v \in C(u)$. Déterminer la forme de la matrice B.

b) En déduire la dimension de $C(u)$.

c) Montrer que (id_E, u, u^2) forme une base de $C(u)$.

Exercice 3

1) Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.

On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2) Écrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.

Par exemple si `L = [0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3) Écrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur `M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, `T[i]` est le nombre d'occurrences de l'entier `i` dans la liste `L`.

Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`.

On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4) Soit `L` une liste d'entiers naturels.

a) Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

b) On veut que ce nombre `n` soit indépendant de `M = maxi(L)+1`.
Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5) Soit A une liste d'entiers naturels. On définit la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la suite A par récurrence comme suit :

— $L_0 = A$.

— Si L_n est construite, alors :

  — on détermine $T_n = \texttt{nb\_oc}(L_n)$.

  — on détermine $I_n = \texttt{ind}(T_n)$.

  — si $I_n = [i_1, \ldots, i_r]$, alors $L_{n+1} = \big[T[i_r], i_r, \ldots, T[i_1], i_1\big]$.

Par exemple si $A = [4, 4, 1, 2]$, alors :

— $L_0 = [4, 4, 1, 2]$

— $L_1 = [2, 4, 1, 2, 1, 1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)

— $L_2 = [1, 4, 2, 2, 3, 1]$ (il y a un « 4 », deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

a) On donne $A = [2, 0, 4, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 1]$. Déterminer L_3 et L_{2018}.

b) On donne $B = [2, 4, 1, 1, 1, 2]$. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

c) On donne $C = [2, 4, 1, 0]$. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

d) Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en arguments une liste d'entiers naturels `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément L_n de la suite de Robinson associée à `A`.

FIN DE L'ÉPREUVE