

Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (d'après ATS 2017)

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^T Y$. Soit s l'endomorphisme de E de matrice S dans la base canonique, avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) La matrice est symétrique **réelle**, donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

2)

$$\chi_S(x) = \det(xI_4 - S) = \left|\begin{array}{ccc|c} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x-1 \end{array}\right| = (x-1)\begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$= (x-1)^2 \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x^2-1) = (x-1)^3(x+1)$$

$$\boxed{\chi_A(x) = (x-1)^3(x+1)}$$

Les valeurs propres de S sont

- $\lambda = 1$, de multiplicité $\alpha = 3$;
- $\lambda = -1$, de multiplicité $\alpha = 1$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(S) = 2 = 3 - 1$.

3) Après calculs, ou en remarquant que $SX_{-1} = -X_{-1}$ avec $X_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on trouve

$$\boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})}$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique étant 2 à 2 orthogonaux, et S étant diagonalisable, $E = E_{-1} \oplus_\perp E_1$, donc $E_1 = E_{-1}^\perp$. On trouve 3 vecteurs orthogonaux à X_{-1} formant une famille libre car orthogonaux deux à deux :

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

Ces vecteurs formant une famille orthogonale, il suffit de les normer pour obtenir une *base orthonormée*, et donc une matrice de passage orthogonale :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Comme $P \in \mathscr{O}_4(\mathbb{R})$, $P^{-1} = P^T$:

$$\boxed{P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S = PDP^{-1}}$$

4) $S^2 = I_4$, donc S est la matrice d'une symétrie s de $E = \mathbb{R}^4$. De plus, c'est une matrice orthogonale ($S^T = S = S^{-1}$), donc s est une symétrie orthogonale. Comme $\dim E_1 = 3 = \dim E - 1$,

$$\boxed{S \text{ est la matrice d'une réflexion par rapport à l'hyperplan } E_1 \text{ d'équation } x - z = 0.}$$

Vous deviez au moins reconnaître une symétrie orthogonale.

5) Comme $S^2 = I_4$,

$$\boxed{S^{2017} = (S^2)^{1008} S = S}$$

Exercice 2 (E3A PC 2015)

1) a) Montrons que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$:

- $\mathcal{A}(E) \subset \mathscr{L}(E)$ et non vide car $0 \in \mathcal{A}(E)$:

$$\forall (X, Y) \in E^2, \qquad \langle 0(X), Y \rangle = 0 = -\langle X, 0(Y) \rangle$$

- Soit u, $v \in \mathcal{A}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (X, Y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \langle (\lambda u + v)(X), Y \rangle &= \lambda \langle u(X), Y \rangle + \langle v(X), Y \rangle && \text{linéarité à gauche du produit scalaire.} \\ &= -\lambda \langle X, u(Y) \rangle - \langle X, v(Y) \rangle && \text{par définition de } \mathcal{A}(E) \\ &= -\langle X, (\lambda u + v)(Y) \rangle && \text{linéarité à droite} \end{aligned}$$

Donc $\lambda u + v \in \mathcal{A}(E)$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{A}(E) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{L}(E)}$

La méthode est toujours la même : commencer par écrire la caractérisation d'un sous-espace vectoriel F au brouillon, avec les notations du cours :

- *$F \subset E$, $F \neq \emptyset$.*
- *$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F$*

Puis traduire dans les notations de l'énoncé, et traduire ce que signifie $x \in F$, $y \in F$, $\lambda x + y \in F$.

Montrons que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) &\Longrightarrow \forall (X, Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y \rangle = -\langle X, u(Y) \rangle = \langle X, u(Y) \rangle \\ &\Longrightarrow \forall (X, Y) \in E^2, \quad \langle X, u(Y) \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad u(Y) \in E^\perp = \{0\} \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad u(Y) = 0 \\ &\Longrightarrow u = 0 \end{aligned}$$

C'est l'exercice 2 de la feuille sur les euclidiens, propriété revue lors de la caractérisation des matrices orthogonales, ou dans le DL. Cette démarche est aussi celle du b) – sens direct –, pour un total de 6 points.

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}}$$

b) **i)** Montrons que $u \in \mathcal{S}(E) \Longrightarrow {}^tM = M$:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}(E) &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle \\ &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad {}^tX{}^tMY = {}^tXMY \\ &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad {}^tX({}^tM - M)Y = 0 \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad ({}^tM - M)Y \in E^\perp = \{0\} \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad {}^tM - M = 0 \\ &\Longrightarrow {}^tM = M \end{aligned}$$

Car l'application sous-jacente est nulle, comme au a).

Ainsi, $u \in \mathcal{S}(E) \Longrightarrow {}^tM = M$

Montrons que ${}^tM = M \Longrightarrow u \in \mathcal{S}(E)$:

$$\begin{aligned} {}^tM = M &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad {}^tX{}^tMY = {}^tXMY \\ &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle \\ &\Longrightarrow u \in \mathcal{S}(E) \end{aligned}$$

Ainsi, ${}^tM = M \Longrightarrow u \in \mathcal{S}(E)$

Conclusion :

$$\boxed{u \in \mathcal{S}(E) \iff {}^tM = M}$$

ii) La démarche est identique à celle du i). Montrons que $u \in \mathcal{A}(E) \Longrightarrow {}^tM = M$:

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{A}(E) &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle \\ &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad {}^tX({}^tM + M)Y = 0 \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad ({}^tM + M)Y \in E^\perp = \{0\} \\ &\Longrightarrow \forall Y \in E, \quad {}^tM + M = 0 \\ &\Longrightarrow {}^tM = -M \end{aligned}$$

Ainsi, $u \in \mathcal{A}(E) \Longrightarrow {}^tM = M$

Montrons que ${}^tM = M \Longrightarrow u \in \mathcal{A}(E)$:

$$\begin{aligned} {}^tM = -M &\Longrightarrow \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle \\ &\Longrightarrow u \in \mathcal{A}(E) \end{aligned}$$

Ainsi, ${}^tM = M \Longrightarrow u \in \mathcal{A}(E)$

Conclusion :

$$\boxed{u \in \mathcal{A}(E) \iff {}^tM = -M}$$

Plus vous avez détaillé et bien rédigé le point précédent, plus l'aspect « de même » devient clair, et donc plus vous pouvez faire bref.

c) Montrons que $(u + \widehat{u}) \in \mathcal{S}(E)$:

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u + \widehat{u}) = M + {}^tM$ donc

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u + \widehat{u}) = {}^t(M + {}^tM) = {}^tM + M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u + \widehat{u})$$

Donc, d'après b)i),

$$\boxed{(u + \widehat{u}) \in \mathcal{S}(E)}$$

Montrons que $(u - \widehat{u}) \in \mathcal{A}(E)$:

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \widehat{u}) = M - {}^tM$ donc

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \widehat{u}) = {}^t(M - {}^tM) = {}^tM - M = -\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \widehat{u})$$

Donc, d'après b)i),

$$\boxed{(u - \widehat{u}) \in \mathcal{A}(E)}$$

On pouvait aussi montrer ces propriétés directement, sans passer par le b).

d) *Ici, exceptionnellement, nous n'avons pas d'information sur la dimension des sous-espaces vectoriels, nous allons donc passer par $E = F_1 + F_2$.*

Montrons que $\mathscr{L}(E) = \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$:

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. D'après c), $u + \widehat{u} \in \mathcal{S}(E)$ et $u - \widehat{u} \in \mathcal{A}(E)$. Comme ce sont deux sous-espaces vectoriels d'après a),

$$u = v + w \qquad \text{avec} \qquad v = \frac{1}{2}(u + \widehat{u}) \in \mathcal{S}(E) \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{2}(u - \widehat{u}) \in \mathcal{A}(E)$$

Donc $u \in \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$. Ainsi,

$$\mathscr{L}(E) = \mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$$

De plus, d'après a), $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)}$$

Remarque. L'ensemble de cette preuve que $\mathscr{L}(E) = \mathcal{S}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$ ressemble à celle de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$, toute fonction se décompose de façon unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. C'est normal : cf. l'exercice 14 de la feuille réduction. Dès que l'on a une symétrie φ d'un espace vectoriel E, on peut décomposer *par la construction faite au a) et au c)* E en $E = E_1 \oplus E_{-1}$. □

2) a) *Je sais que le chapitre du cours qui traite des endomorphismes symétriques est très long et fourmille de résultats, ce qui explique votre absence d'idées pour démarrer cette question.*

f est un endomorphisme symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Notons λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres associées aux vecteurs propres e_1, e_2 et e_3.

Soit $X \in E$. Par définition de la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned} f(X) &= \langle e_1, f(X)\rangle e_1 + \langle e_2, f(X)\rangle e_2 + \langle e_3, f(X)\rangle e_3 \\ &= \langle f(e_1), X\rangle e_1 + \langle f(e_2), X\rangle e_2 + \langle f(e_3), X\rangle e_3 && \text{car } f \text{ est symétrique} \\ &= \lambda_1\langle e_1, X\rangle e_1 + \lambda_2\langle e_2, X\rangle e_2 + \lambda_3\langle e_3, X\rangle e_3 && \text{car } e_i \text{ vecteur propre pour } \lambda_i \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe } (e_1, e_2, e_3) \text{ base orthonormée de } E \text{ et trois réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ tels que :} \\ \qquad \forall X \in E \qquad f(X) = \lambda_1\langle e_1, X\rangle e_1 + \lambda_2\langle e_2, X\rangle e_2 + \lambda_3\langle e_3, X\rangle e_3 \end{array}}$$

b) En terme de valeurs propres,

$$\boxed{f \text{ symétrique est une projection si et seulement si ses valeurs propres appartiennent à } \{0, 1\}.}$$

Montrons le : supposons f symétrique et $\operatorname{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$. Quitte à réordonner les e_i, avec les notations de la question précédente,

$$\forall X \in E \qquad f(X) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, X\rangle e_i$$

Où $k = \dim E_1$. Donc f est un projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = E_1$.

Réciproquement, si f est un projecteur orthogonal sur F, alors il existe $(e_1, \ldots, e_k)$ base orthonormée de F telle que

$$\forall X \in E \qquad f(X) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, X\rangle e_i$$

Ce qui permet de montrer (calcul à faire) que f est symétrique.

De même,

$$\boxed{f \text{ symétrique est une symétrie si et seulement si ses valeurs propres appartiennent à } \{-1, 1\}.}$$

Soit f symétrique fixée et $p = \frac{1}{2}(f - \mathrm{id}_E)$. Comme combinaison linéaire d'endomorphismes symétriques, c'est un endomorphisme symétrique (d'après 1)a)). De plus, f est une symétrie orthogonale si et seulement si p est un projecteur orthogonal, i.e. $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0,1\}$ d'après ci-dessus. Ce qui prouve l'affirmation précédente.

c) Répondre à la question consiste donc à trouver une base de diagonalisation et les valeurs propres associées de l'endomorphisme f.

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ x-2 & x-1 & 2 \\ x-2 & 2 & x-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ x-3 & -1 & 3-x \\ 0 & 2 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-3)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-3)^2(x-1+2+2) \quad \text{(Sarrus)} = (x-3)^2(x+3)$$

Les valeurs propres de f sont

- $\lambda = 3$, de multiplicité $\alpha = 2$;
- $\lambda = -3$, de multiplicité $\alpha = 1$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}(f) = 3 = 3 + 3 - 3$.

Des vecteurs propres associés sont $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda_1 = -3$, puis un vecteur orthogonal qui sera nécessairement dans E_3, car $E_3 \perp E_{-3}$ et $E = E_3 \oplus E_{-3}$: $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

Pour être sur d'avoir une famille orthogonale, on pose $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La famille (e_1, e_2, e_3) étant orthogonale, il reste à la normer pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) = (\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) \quad \text{et} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-3, 3, 3)}$$

3) a) Soit $X \in \mathrm{Ker}\ g$ et $Y = g(X') \in \mathrm{Im}\ g$. Comme $g(X) = 0$, il vient

$$\langle X, g(X') \rangle = -\langle g(X), X' \rangle = -\langle 0, X' \rangle = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Ker } g \text{ et Im } g \text{ sont orthogonaux}}$

D'après ci-dessus, $\mathrm{Ker}\ g \cap \mathrm{Im}\ g = \{0\}$.

De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\ g + \dim \mathrm{Im}\ g = \dim E$. Par conséquent,

$$\boxed{E = \mathrm{Ker}\ g \oplus \mathrm{Im}\ g}$$

b) Montrons que $\mathrm{Im}\ g$ est stable par g : pour tout $X \in E$, $g(X) \in \mathrm{Im}\ g$, donc en particulier pour $X \in \mathrm{Im}\ g \subset E$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Im}\ g \text{ est stable par } g}$$

Montrons que $\widetilde{g}$ ne peut pas avoir de valeur propre réelle : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\widetilde{g}$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Comme $X \in \text{Im } g$, $X = g(X')$.

$$\begin{aligned}
\|X\|^2 &= \langle g(X'), X\rangle \\
&= -\langle X', g(X)\rangle && \text{car } g \in \mathcal{A}(E). \\
&= -\lambda\langle X', X\rangle && \text{car } X \text{ vecteur propre de } g. \\
&= -\lambda\langle X', g(X')\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Or $X \neq 0$, donc $\|X\| \neq 0$, c'est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\widetilde{g} \text{ ne peut pas avoir de valeur propre (réelle).}}$$

Montrons que g est de rang 2 :

- $g \neq 0$ par hypothèse, donc rg $g \neq 0$.
- Si rg $g = 1$, Im g = Vect u avec $u \neq 0$. De plus $g(u) \in \text{Im } g = \text{Vect } u$, donc $g(u) = \lambda u$.
  Or d'après ci-dessus, g n'a pas de valeur propre réelle : $\dim \text{Im } g \neq 1$.
- Écartons le cas rg $g = 3$:

  $$\det M = \det {}^tM = \det(-M) = (-1)^3 \det M = -\det M$$

  Donc $\det M = 0$, et g n'est pas inversible, donc pas surjectif (dimension finie). Ainsi, rg $g \neq 3$.

Conclusion : $\boxed{\text{rg } g = 2}$

c) Soit M la matrice de g dans une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $E = \text{Im } g \oplus \text{Ker } g$ (somme directe obtenue au 3)a)). Comme Im g est stable par g, et que $g(\text{Ker } g) = \{0\}$ donc Ker g l'est aussi, la matrice est diagonale blocs :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

La taille des blocs est donnée par rg $g = 2$. Or d'après 1)b), ${}^tM = -M$, ce qui nous donne

$$a = d = e = 0 \qquad \text{et} \qquad b = -c$$

En notant $k = -b = c$, on obtient donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $g(e_1) = ke_2$, $g(e_2) = -ke_1$ et $g(e_3) = 0$.
Soit $X \in E$. De même qu'en 2)a), par définition de la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée,

$$\begin{aligned}
g(X) &= \langle e_1, g(X)\rangle e_1 + \langle e_2, g(X)\rangle e_2 + \langle e_3, g(X)\rangle e_3 \\
&= -\langle g(e_1), X\rangle e_1 - \langle g(e_2), X\rangle e_2 - \langle g(e_3), X\rangle e_3 && \text{car } g \text{ est antisymétrique} \\
&= -k\langle e_2, X\rangle e_1 + k\langle e_1, X\rangle e_2 + 0 && \text{d'après ci-dessus} \\
&= k(\langle e_1, X\rangle e_2 - \langle e_2, X\rangle e_1)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe } (e_1, e_2, e_3) \text{ base orthonormée de } E \text{ et un réel } k \text{ tels que} \\[1em] \qquad \forall X \in E \qquad g(X) = k(\langle e_1, X\rangle e_2 - \langle e_2, X\rangle e_1) \end{array}}$$

d) Cherchons une base du noyau : Comme $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - \operatorname{rg} g = 1$, il suffit de trouver un vecteur $v_3 \neq 0$. Par exemple $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cherchons une base de l'image : Comme $\operatorname{Ker} g \perp \operatorname{Im} g$ d'après 3)a), il suffit de prendre deux vecteurs orthogonaux à v_3 pour compléter en une base de l'image :

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_1 = v_2 \wedge v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Toujours commencer par le noyau, avant de s'attaquer à l'image.

Nous avons donc construit la base orthonormée directe

$$\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3) = (\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$$

La construction de v_1 par le produit vectoriel nous assure que la base orthonormée est directe. De plus, $g(e_2) = -\sqrt{3}e_1 = -ke_1$, donc $\boxed{k = \sqrt{3}}$

4) Soit $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(r)$. L'application f aura pour matrice $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et l'application g aura pour matrice $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base canonique est une base orthonormée qui convient pour décomposer f et g.

$$\boxed{\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\text{can}} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cos\theta \quad \lambda_3 = 1 \quad \text{et} \quad k = \sin\theta}$$

Exercice 3 (E3A PC 2016)

1) **a)** Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : cours de PCSI, de PC.

b) Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz : x et y sont colinéaire. Il faut montrer une condition nécessaire et suffisante, c'est-à-dire une équivalence : un sens, puis l'autre. Cours de PCSI.

2) **a)** Comme $B = \begin{pmatrix} \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle u_1, u_2 \rangle & \|u_2\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il vient, par positivité et symétrie du produit scalaire,

$$\boxed{a = \|u_1\|^2 \geqslant 0 \qquad b = \langle u_1, u_2 \rangle = c \qquad d = \|u_2\|^2 \geqslant 0}$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $|\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \leqslant \|u_1\|^2\|u_2\|^2$, donc

$$\boxed{\det B = ad - b^2 = \|u_1\|^2\|u_2\|^2 - |\langle u_1, u_2 \rangle|^2 \geqslant 0}$$

b) Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de E. Comme $a \geqslant 0$, posons $u_1 = \sqrt{a}e_1$: $\|u_1\|^2 = a\|e_1\|^2 = a$. Posons $u_2 = ye_1 + ze_2$. Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée, il vient

$$b = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \sqrt{a}e_1, ye_1 + ze_2 \rangle = \sqrt{a}y$$

Donc, en supposant $a > 0$, on pose $y = \dfrac{b}{\sqrt{a}}$. Alors, $\|u_2\|^2 = y^2 + z^2 = \dfrac{b^2}{a} + z^2 = d$.

Or $\det B = ad - b^2 \geqslant 0$, donc on pose $z = \sqrt{d - \dfrac{b^2}{a}}$. En résumé

$$\boxed{\text{Si } a > 0, \text{ le couple } u_1 = \sqrt{a}e_1,\ u_2 = \frac{b}{\sqrt{a}}e_1 + \sqrt{d - \frac{b^2}{a}}e_2 \text{ convient.}}$$

Si $a = 0$, on pose nécessairement $u_1 = 0$. De plus, $\det B = ad - b^2 = -b^2 \geqslant 0$, donc $b = 0$, ce qui est cohérent. Il suffit alors de poser $u_2 = \sqrt{d}e_1$, avec e_1 un vecteur unitaire quelconque.

$$\boxed{\text{Si } a = 0, \text{ le couple } u_1 = 0,\ u_2 = \sqrt{d}e_1 \text{ convient.}}$$

Il faut savoir se laisser guider par une indication, et surtout faire des calculs dans une base orthonormée (encadré du cours).

c) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la matrice B vérifie la propriété G. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Alors, d'après 2)a), $a \geqslant 0$, $b = c$, $d \geqslant 0$ et $\det B \geqslant 0$.
Donc $a^p \geqslant 0$, $b^p = c^p$ et $d^p \geqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \det B = ad - b^2 \geqslant 0 &\Longrightarrow ad \geqslant b^2 \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow (ad)^p \geqslant (b^2)^p \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \det B^{\otimes p} = (ad)^p - (b^2)^p \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après 2)b), $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété G.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété G. Alors, pour $p = 1$, B vérifie la propriété G.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La matrice } B \text{ vérifie la propriété } G \text{ si et seulement si, pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ B^{\otimes p} \text{ vérifie la propriété } G}$$

3) a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|u_1\|^2 & \langle u_1, u_2\rangle & \langle u_1, u_3\rangle \\ \langle u_1, u_2\rangle & \|u_2\|^2 & \langle u_2, u_3\rangle \\ \langle u_1, u_3\rangle & \langle u_2, u_3\rangle & \|u_3\|^2 \end{pmatrix}$$

i) L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_1 et u_2 s'écrit

$$|\langle u_1, u_2\rangle|^2 \leqslant \|u_1\|^2\|u_2\|^2 \Longrightarrow 1 \leqslant 1 \times a$$

Donc $\boxed{a \geqslant 1}$

De même, l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs u_2 et u_3 s'écrit

$$|\langle u_2, u_3\rangle|^2 \leqslant \|u_2\|^2\|u_3\|^2 \Longrightarrow b^2 \leqslant a \times 1$$

Donc $\boxed{a \geqslant b^2}$

ii) Par définition de C, $\langle u_1, u_3\rangle = 0$, $\|u_1\| = \|u_3\| = 1$. Donc

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, u_3) \text{ est orthonormale}}$$

iii) Comme la famille (u_1, u_3) est orthonormale, elle forme une base orthonormée de $\operatorname{Vect}(u_1, u_3)$, ainsi la projection orthogonale s'écrit

$$\boxed{v_2 = \langle u_2, u_1\rangle u_1 + \langle u_2, u_3\rangle u_3 = u_1 + bu_3}$$

iv) L'inégalité de Bessel [1] s'écrit $\|v_2\| \leqslant \|u_2\|$. En passant au carré et en remplaçant,

$$\boxed{1 + b^2 \leqslant a}$$

v) Pythagore : $\|u_2\|^2 = \|v_2\|^2 + \|u_2 - v_2\|^2$. Or $\|u_2\|^2 = a$ et $\|v_2\|^2 = 1 + b^2$. Donc

$$\begin{aligned} a = b^2 + 1 &\Longrightarrow \|u_2\|^2 = \|v_2\|^2 \\ &\Longrightarrow \|u_2 - v_2\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow u_2 - v_2 = 0 \\ &\Longrightarrow u_2 - u_1 - bu_3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $a = b^2 + 1$ implique que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.
Réciproquement, si cette famille est liée, comme (u_1, u_3) est libre – c'est une famille orthonormée – on a nécessairement $u_2 \in \mathrm{Vect}\,(u_1, u_3)$, donc $u_2 = v_2$ projeté de u_2 sur $\mathrm{Vect}\,(u_1, u_3)$. Et, par conséquent, $a = \|u_2\|^2 = \|v_2\|^2 = 1 + b^2$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } u_1,\ u_2 \text{ et } u_3 \text{ sont linéairement indépendants si et seulement si } a > b^2 + 1}$$

Il est presque toujours plus simple de travailler avec une égalité qu'avec une inégalité. On passe donc par la contraposée.

b) **i)** Par construction d'une base orthonormée,

$$\langle u, e_1 \rangle = x = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle u, e_3 \rangle = z = b$$

Ainsi,

$$\boxed{u = e_1 + ye_2 + be_3}$$

ii) Posons $u_1 = e_1$, $u_3 = e_3$ et $u_2 = u = e_1 + ye_2 + be_3$.
On veut $\|u\|^2 = 1 + y^2 + b^2 = a$, et comme $a - (b^2 + 1) \geqslant 0$, on pose $y = \sqrt{a - (b^2 + 1)}$.

$$\boxed{\text{Avec } u_1 = e_1,\ u_2 = e_1 + \sqrt{a - (b^2 + 1)}e_2 + be_3 \text{ et } u_3 = e_3, \text{ on a } C = G(u_1, u_2, u_3)}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La matrice } C \text{ vérifie la propriété } G}$$

iii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $C^{\otimes p}$ vérifie les hypothèses du 3)b). Comme $a \geqslant b^2 + 1 \geqslant 0$,

$$a^p \geqslant (b^2 + 1)^p = (b^2)^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{p}{k} b^{2k}}_{\geqslant 0} \geqslant (b^2)^p + 1$$

Donc, d'après 3)b)ii), la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété G. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ la matrice } C^{\otimes p} \text{ vérifie la propriété } G}$$

4) **a)** Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$, d'où l'inégalité classique

$$ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Soit $(f, g) \in E^2$. D'après ci-dessus, avec $a = |f(t)|$ et $b = |g(t)|$,

$$\forall t \in]0, +\infty[, \qquad |f(t)g(t)t^{p-1}| \leqslant f^2(t)\frac{t^{p-1}}{2} + g^2(t)\frac{t^{p-1}}{2}$$

Or, avec $P = \dfrac{X^{p-1}}{2} \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto (f(t))^2 P(t)$ et $t \mapsto (g(t))^2 P(t)$ sont intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc leur somme aussi, et par majoration,

1. Souvenez-vous, c'est une des questions de cours du chapitre.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente}}$$

b) • Symétrique : Pour tout $(f,g) \in E^2$,

$$\langle f,g\rangle_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \langle g,f\rangle_p$$

Donc $\langle .,.\rangle_p$ est symétrique.

• Bilinéaire : Soit $g \in E$ fixé. Pour tout $(f_1,f_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\langle \lambda f_1 + f_2, g\rangle_p = \int_0^{+\infty} \Big(\lambda f_1(t) + f_2(t)\Big) g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \lambda\langle f_1,g\rangle_p + \langle f_2,g\rangle_p$$

La convergence est acquise d'après a, et car E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Donc $\langle .,g\rangle_p$ est linéaire. Par symétrie, $\langle .,.\rangle_p$ est bilinéaire.

• Positive : Pour tout $f \in E$, par positivité de l'intégrale, comme $t^{p-1} \geqslant 0$,

$$\langle f,f\rangle_p = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 t^{p-1}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Donc $\langle .,.\rangle_p$ est positive.

• Définie positive : Soit $f \in E$ telle que

$$\langle f,f\rangle_p = \int_0^{+\infty} (f(t))^2 t^{p-1}\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, $t \mapsto (f(t))^2 t^{p-1}$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad (f(t))^2 t^{p-1} = 0$$

Comme $t^{p-1} \neq 0$, $f = 0$.
Ainsi, $\langle .,.\rangle_p$ est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{\langle .,.\rangle_p \text{ est bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est une produit scalaire}}$$

c) *Il ne faut pas perdre les réflexes acquis lors du chapitre d'intégration.*
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $t \mapsto P(t)h(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Étude en 0 : $t \mapsto P(t)h(t)$ est prolongeable par continuité (par $P(0)$) en 0, donc intégrable au voisinage de 0.

• Étude au voisinage de $+\infty$: Par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^2|P(t)e^{-t}| = 0$$

Donc $|P(t)e^{-t}| = o(\frac{1}{t^2})$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison $\int_1^{+\infty} |P(t)e^{-t}|\,\mathrm{d}t$ aussi.

Conclusion : $\boxed{h \in E}$

d) Effectuons le changement de variable $t \mapsto u = \alpha t$, qui est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ $(\alpha > 0)$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\frac{t^{p-1}}{\alpha^{p-1}}\frac{du}{\alpha} = \boxed{\frac{\gamma_p}{\alpha^p}}$$

e) *Dans le doute, se laisser guider par les notations de l'énoncé.*
Comme $e^{-\alpha t}t^{p-1} > 0$ sur $]0, +\infty[$, $\gamma_p > 0$.
Soit E l'espace vectoriel défini au début de la question 4), muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_p$ précédent, et

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!]\,, \quad \forall t \in]0, +\infty[\qquad u_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_p}} e^{-\alpha_i t}}$$

D'après d),

$$\forall (i,j) \in [\![1, ,]\!]\, n^2 \qquad \langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\gamma_p} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha_i+\alpha_j)t} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p} = d_{ij}^p$$

Donc $\boxed{D^{\otimes p} = G(u_1, \dots, u_n)}$

Exercice 4 (d'après CNM 2017) **1)** Cours.

2) Un endomorphisme orthogonal est inversible, et conserve le produit scalaire (se montre à l'aide de $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{2}(\|x+y\| - \|x\| - \|y\|)$).

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle f(x), y \rangle = \langle f(x), f(f^{-1}(y)) \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$$

Conclusion :
$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle}$$

3) D'après 2), et par conservation du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in E^2 \quad \langle (f+f^{-1})(x), y \rangle &= \langle f(x), y \rangle + \langle f^{-1}(x), y \rangle \\
&= \langle x, f^{-1}(y) \rangle + \langle f(f^{-1}(x)), f(y) \rangle \\
&= \langle x, (f^{-1}+f)(y) \rangle
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f + f^{-1} \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$
Toujours la même idée : $f + f^*$ est symétrique.

4) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ la valeur propre associée. $(f+f^{-1})(x) = \lambda x$. En composant par f :

$$f^2(x) + x = \lambda f(x)$$

Soit $\alpha x + \beta f(x) \in \mathrm{Vect}\,(x, f(x))$.

$$f(\alpha x + \beta f(x)) = \alpha f(x) + \beta f^2(x) = \alpha f(x) + \beta(-x + \lambda f(x)) \in \mathrm{Vect}\,(x, f(x))$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Vect}\,(x, f(x)) \text{ est stable par } f}$

b)
- Si f admet une valeur propre (réelle), notons $x \neq 0$ un vecteur propre associé. $F = \mathrm{Vect}\,(x)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 stable par f.
- Sinon, $\dim E \geqslant 2$. L'endomorphisme $f + f^{-1}$ de E est symétrique (question 3) donc diagonalisable dans une base orthonormée. En particulier, il existe un x comme donné par l'énoncé. D'après 4)a), $F = \mathrm{Vect}\,(x, f(x)) \neq \{0\}$ est stable par f dans ce cas, et $\dim F \leqslant 2$ par construction.

Conclusion : $\boxed{f \text{ admet au moins un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2}}$

5) **a)** Par construction, $f(F) \subset F$. Notons $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de F induit par f.

$$\forall x \in F \quad \|\widetilde{f}(x)\| = \|f(x)\| = \|x\|$$

Donc $\widetilde{f}$ est une isométrie de F, en particulier $\widetilde{f}$ est bijective : $f(F) = \mathrm{Im}\ \widetilde{f} = F$.
Conclusion : $\boxed{f(F) = F}$

b) $x \in F^\perp \Longrightarrow \forall y \in F, \quad \langle x, y\rangle = 0$

$\Longrightarrow \forall y \in F, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = 0$ car f est une isométrie

$\Longrightarrow \forall y' \in f(F) = F, \quad \langle f(x), y'\rangle = 0$ d'après 5)a)

$\Longrightarrow f(x) \in F^\perp$

Conclusion : $\boxed{F^\perp \text{ est stable par } f}$

6) D'après 4)b), il existe au moins un sous-espace vectoriel de E stable, de dimension 1 ou 2. Soit un tel F. Alors $F^\perp$ est de dimension $n+1$ ou n (respectivement), et est stable par f (d'après 5)b)).
Notons $\widetilde{f} : F^\perp \to F^\perp$ l'endomorphisme de $F^\perp$ induit par f, bien défini puisque $F^\perp$ est stable par f.

En appliquant l'hypothèse de l'énoncé à $F^\perp$ et $\widetilde{f}$, il existe une décomposition $F^\perp = \bigoplus_{i=1}^{k_{\widetilde{f}}} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par $\widetilde{f}$ (et donc f) et $\dim F_i \leqslant 2$.
Notons $k_f = k_{\widetilde{f}} + 1$ et $F_{k_f} = F$. Comme $E = F^\perp \oplus F$, et que ces sous-espaces vectoriels sont orthogonaux, $E = \bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ et les sous-espaces vectoriels sont 2 à 2 orthogonaux.
Conclusion :

$\boxed{\text{Il existe une décomposition } E = \bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i \text{ où les } F_i \text{ sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par } f \text{ et } \dim F_i \leqslant 2.}$

7) Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathcal{H}_n$: Pour tout E euclidien de dimension n et tout $f \in \mathscr{O}(E)$, il existe une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par f et $\dim F_i \leqslant 2$.

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ et $\underline{\mathcal{H}_2}$: $F = E$ convient, donc l'hypothèse de récurrence est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. D'après 6), $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } E \text{ euclidien et tout } f \in \mathscr{O}(E), \text{ il existe une décomposition } E = \bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i \text{ où les } F_i \text{ sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par } f \text{ et } \dim F_i \leqslant 2.}$

8) Soit $f \in \mathscr{O}(E)$ et $E = \bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ comme à la question 7.
Soit $\mathscr{B}$ une base obtenue en réunissant des base orthonormée de chacun des F_i. Comme les F_i sont 2 à 2 orthogonaux, on obtient une base orthonormée de $\bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i = E$.
De plus, les F_i sont stables par f, donc la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale blocs, avec des blocs de taille $\dim F_i \leqslant 2$.

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe une base orthonormée } \mathscr{B} \text{ telle que la matrice de } f \text{ dans cette base soit diagonale blocs, avec des blocs au plus } 2 \times 2}$

9) Soit $i \in [\![1,,]\!]\, k_f$, et $f_i \in \mathscr{L}(F_i)$ induite par f.

- Si $\dim F_i = 1$, la matrice de f_i est 1×1 donc diagonale, et le terme sur la diagonale est une valeur propre, donc 1 ou -1 d'après 1.
- Si $\dim F_i = 2$, La matrice M_i de f_i dans une base orthonormée de F_i est orthogonale : $M_i \in O_2(\mathbb{R})$.

– Si $\det f_i = 1$, $M_i \in SO_2(\mathbb{R})$ et donc de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (matrice d'une rotation).

– Si $\det f_i = -1$, f_i est une symétrie orthogonale en dimension 2, donc il existe une base $\mathscr{B}_i$ de F_i telle que $M_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, en choisissant bien la base, les blocs diagonaux de la matrice de f sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ou diagonaux avec des 1 et -1 sur la diagonale.

10) En regroupant les 1 et -1 éventuels en début de matrice, c'est-à-dire en écrivant

$$E = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r} F_i \right)$$

avec E_1 le sous-espace propre pour la valeur propre 1, de dimension p, E_{-1} pour -1, de dimension q, et les F_i de dimension 2, il vient d'après 9

$$\boxed{\mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} (I_p) & & & & & & \\ & (-I_q) & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ & & & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE