Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 18 décembre 2017

Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = X^T Y$. Soit s l'endomorphisme de E de matrice S dans la base canonique, avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer sans calcul que S est diagonalisable.

2) Déterminer le polynôme caractéristique de S sous forme factorisée.

3) Déterminer une matrice P de passage vers une base de diagonalisation. On donnera la matrice D diagonale associée, P^{-1}, et la formule reliant S, P et D.

4) Calculer S^2. Décrire s (géométriquement).

5) Calculer S^{2017}.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathscr{B}$ étant orthonormale et directe. On notera $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire tel que, pour $X, Y \in E$, $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

1) On considère les deux sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ définis par :

$$\mathcal{S}(E) = \left\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \forall (X, Y) \in E^2,\ \langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle\right\}$$
$$\mathcal{A}(E) = \left\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \forall (X, Y) \in E^2,\ \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle\right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ (on l'admettra pour $\mathcal{S}(E)$), et montrer que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$.

b) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, avec $u : X \mapsto MX$. Montrer que

i) $u \in \mathcal{S}(E) \iff {}^tM = M$ **ii)** $u \in \mathcal{A}(E) \iff {}^tM = -M$

c) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. On lui associe $\widehat{u} \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\widehat{u}) = {}^tM$. Montrer que $(u + \widehat{u}) \in \mathcal{S}(E)$ et $(u - \widehat{u}) \in \mathcal{A}(E)$.

d) Conclure que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathscr{L}(E)$.

2) **a)** Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormée de E et de trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\forall X \in E \qquad f(X) = \lambda_1 \langle e_1, X\rangle e_1 + \lambda_2 \langle e_2, X\rangle e_2 + \lambda_3 \langle e_3, X\rangle e_3$$

b) Préciser dans quel cas f est une projection orthogonale, ou une symétrie orthogonale.

c) Exemple. Soit f de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) et des réels λ_1, λ_2 et λ_3 vérifiant la formule du 2)a) pour f ci-dessus.

3) Soit $g \in \mathcal{A}(E)$ non nul.

a) Montrer que Ker g et Im g sont orthogonaux, puis que $E = \mathrm{Ker}\ g \oplus \mathrm{Im}\ g$.

b) Montrer que Im g est stable par g, et que l'endomorphisme $\widetilde{g}$ induit par g sur Im g ne peut pas avoir de valeur propre (réelle). En déduire que g est de rang 2.

c) Justifier l'existence d'une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de E et d'un réel $k \neq 0$ tels que

$$\forall X \in E \qquad g(X) = k(\langle e_1, X\rangle e_2 - \langle e_2, X\rangle e_1)$$

Indication : *On pourra passer par la matrice de g dans une base bien choisie.*

d) Exemple. Soit g tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) de E et $k \neq 0$ associés à g (cf 3)c)).

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et la rotation $r \in SO(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère aussi $\widehat{r}$ de matrice ${}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r)$.

Donner la décomposition de $f = \dfrac{1}{2}(r + \widehat{r})$ comme en 2)a), et de $g = \dfrac{1}{2}(r - \widehat{r})$ comme en 3)c) lorsque $g \neq 0$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$.

1) Soient x et y deux vecteurs de E.

a) Démontrer l'inégalité :

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$$

On pourra considérer la fonction définie par $f(t) = \|x + ty\|^2$ pour $t \in \mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale en t.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs x et y pour que $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$. Justifier votre réponse.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne $\langle u_i, u_j\rangle$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne est noté m_{ij}.
Si $p \in \mathbb{N}^*$, $M^{\otimes p}$ est la matrice de coefficient m_{ij}^p (m_{ij} puissance p).
On dit que M vérifie la propriété G s'il existe des vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ de E tels que

$$M = G(u_1, \dots, u_n)$$

2) Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) On suppose que B vérifie la propriété G. Soit $(u_1, u_2) \in E^2$ tel que $B = G(u_1, u_2)$.
Justifier $a \geqslant 0$, $b = c$, $d \geqslant 0$ et $\det B \geqslant 0$.

b) Réciproquement, on suppose que $a \geqslant 0$, $b = c$, $d \geqslant 0$ et que $\det B \geqslant 0$. Justifier que B vérifie la propriété G. Indication : *En considérant (e_1, e_2) une base orthonormée de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telle que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1, et $u_2 = ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y et z que l'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.*

c) Justifier que la matrice B vérifie la propriété G si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété G.

3) Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soit a et b deux réels. On pose

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

a) On suppose que C vérifie la propriété G. Soit (u_1, u_2, u_3) des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.

i) Démontrer que $a \geqslant 1$ et $a \geqslant b^2$.

ii) Justifier que la famille (u_1, u_3) est orthonormale.

iii) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

iv) En déduire que $a \geqslant b^2 + 1$.

v) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2 et u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

b) On suppose $a \geqslant b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

i) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que

$$\langle u, e_1 \rangle = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle u, e_3 \rangle = b$$

ii) Justifier que la matrice C vérifie la propriété G.

iii) Est-il vrai que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété G ? On argumentera précisément la réponse.

4) Soit $\mathscr{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ des fonctions f telles que, pour tout polynôme P, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(t))^2 P(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On admet que E est un sous-espace vectoriel.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que, pour tout f, g dans E, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

b) On peut donc définir l'application

$$\langle .,. \rangle : \begin{cases} E \times E \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Démontrer que c'est un produit scalaire sur E.

c) Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ appartient à E.
On note désormais

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1}\,\mathrm{d}t$$

d) Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ appartient à E. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ en fonction de α, p et γ_p.

e) Soit n un entier $\geqslant 2$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs. On désigne par $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients d_{ij} sont définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad d_{ij} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}$$

Démontrer que pour entier $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E tels que $D^{\otimes p} = G(u_1, \ldots, u_n)$. On explicitera E, son produite scalaire, ainsi que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 4 (Réduction d'un endomorphisme orthogonal)

Soit E un espace euclidien c'est-à-dire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$, on désigne par $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On dit qu'un endomorphisme f de E est orthogonal (ou une isométrie) si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
Soit f un endomorphisme orthogonal de E.

1) Démontrer que $\mathrm{Sp}\,(f)$ est inclus dans $\{-1, 1\}$.

2) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^{-1}(y) \rangle$.

3) Montrer que $f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E.

4) Soit x un vecteur propre de $f + f^{-1}$.

- **a)** Montrer que $\mathrm{Vect}\,(x, f(x))$ est stable par f.
- **b)** En déduire que f admet au moins un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

5) Soit F un sous-espace vectoriel stable par f.

- **a)** Montrer que $f(F) = F$.
- **b)** Démontrer que $F^\perp$ est stable par f.

6) Soit $n \geqslant 1$ fixé. On suppose que, pour tout E euclidien de dimension n ou $n+1$ et tout $f \in \mathscr{O}(E)$, il existe une décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par f et $\dim F_i \leqslant 2$.
Soit E euclidien de dimension $n+2$, et $f \in \mathscr{O}(E)$ fixés. En considérant un sous-espace vectoriel F de E et la restriction $\widetilde{f} : F^\perp \to F^\perp$ de f (dont on justifiera l'existence) bien choisies, montrer qu'il existe une décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels 2 à 2 orthogonaux stables par f et $\dim F_i \leqslant 2$.

7) En déduire, par récurrence, en précisant soigneusement l'hypothèse de récurrence, que pour tout E euclidien et tout $f \in \mathscr{O}(E)$, il existe une décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k_f} F_i$ où les F_i sont des sous-espaces vectoriels stables par f et $\dim F_i \leqslant 2$.

8) En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{O}(E)$, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale blocs, avec des blocs au plus 2×2.

9) Montrer qu'en choisissant bien la base, ces blocs sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, ou diagonaux avec des 1 et -1 sur la diagonale.

10) En déduire que $\mathrm{Mat}\,(f, \mathscr{B})$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} (I_p) & & & & & & \\ & (-I_q) & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & \\ & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ & & & & & \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix}$$

Où p, q et r sont des entiers qui peuvent être nuls.

FIN DE L'ÉPREUVE