Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer Ker f et Im f. La matrice M est-elle inversible ?

2) Montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I et M. En déduire l'inverse de M.

3) On pose $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\,\mathrm{id})$.

- **a)** Donner la matrice de p dans la base canonique. Déterminer $p \circ p$ et en déduire la nature de l'endomorphisme p. Déterminer Ker p et Im p.
- **b)** Déterminer la nature de l'endomorphisme q.
- **c)** Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, p^n et q^n.
- **d)** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de f^n en fonction de p et q.
- **e)** Déterminer (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $M^n = a_n I + b_n M$.
- **f)** La formule précédente reste-t-elle valable si $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 2

On considère $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{E}$ si

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que I et J appartiennent à $\mathscr{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2) Soit a et b deux réels et $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a et b pour que $K \in \mathscr{E}$.

3) **a)** Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que s est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$.

4) **a)** Montrer que $\mathscr{E} = \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$.

b) Vérifier que $\mathscr{E} \subset \{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AJ = s(A)J\}$.

5) Soit A et B deux matrices de $\mathscr{E}$. Montrer que $AB \in \mathscr{E}$, puis que $s(AB) = s(A)s(B)$.

6) Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathscr{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

a) À l'aide de la question 4a montrer que $A^{-1} \in \mathscr{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s(A^{-1})$ en fonction de $s(A)$.

7) Soit $A \in \mathscr{E}$. On pose $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.

On note $\mathscr{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathscr{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ stable par produit.

b) Montrer que $B \in \mathscr{E}$ et que $BC = CB = 0$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(A - B)^n = A^n - B^n$.

d) La matrice C appartient-elle à $\mathscr{F}$?

e) En déduire que $\mathscr{E} = \mathrm{Vect}\,(J) \oplus \mathscr{F}$.

8) Soit $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques (${}^tM = M$) et $A_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques (${}^tM = -M$).

a) Montrer que $F_S = \mathscr{F} \cap S_3(\mathbb{R})$ et $F_A = \mathscr{F} \cap A_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels, puis que $\mathscr{F} = F_S \oplus F_A$.

b) En déduire la dimension de $\mathscr{F}$ puis celle de $\mathscr{E}$.

Exercice 3

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1) **a)** Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.

b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

2) Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.

3) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

4) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.

5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 2

On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} \quad x_0 &= x \\ \forall n \geqslant 0 \quad x_{n+1} &= f(x_n) \end{cases}$$

On note $E_x = \mathrm{Vect}\,(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
On rappelle que $y \in E_x \iff \exists m \in \mathbb{N},\ \exists(\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1},\ y = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_m x_m$

1) Montrer que $y \in E_x$ entraîne $f(y) \in E_x$.

2) En déduire que E_x est stable par f.

3) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.

4) Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, \dots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

a) Justifier l'existence d'un tel p.

b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

c) On note $E'_x = \mathrm{Vect}\,(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

5) On note $\widehat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x.
Donner la matrice de $\widehat{f}$ dans la base $\mathscr{B}_p$.

6) Montrer que la famille $(\mathrm{id}_{E_x}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \dots, \widehat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_x)$.

7) **a)** Montrer que pour tout $k < p$,

$$\widehat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x_k)$$

b) En déduire que l'on a

$$\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1 \widehat{f} - a_0 \,\mathrm{id}_{E_x} = 0$$

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $F_1, \dots, F_k$ une famille de sous-espaces vectoriels non nuls de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$.
Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j=1, j\neq i}^{j=k} F_j$.

1) Montrer que $(p_1, \dots, p_k)$ est libre.

2) Justifier que $\mathrm{Vect}\,(p_1, \dots, p_k)$ est de dimension k.

3) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que

$$(\forall i \in [\![1, k]\!], \quad f \circ p_i = p_i \circ f) \iff (\forall i \in [\![1, k]\!], f(F_i) \subset F_i)$$

b) On suppose que f commute avec tous les p_i. Donner la forme de la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition de E suivant les F_i.

4) On note Δ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de $\mathrm{Vect}\,(p_1, \dots p_k)$.

a) Justifier que Δ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Déterminer sa dimension.

FIN DE L'ÉPREUVE