Épreuve de Mathématiques 5

Correction

4

Exercice 1 (E3A PC 2019)

1) **a)** Soit $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

$$f_{\alpha,\lambda}(t)\sim_0 t^\alpha \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha>0\\ 1 & \text{si } \alpha=0\\ +\infty & \text{si } \alpha<0 \quad (\text{car } t>0)\end{cases}$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{t\to 0} f_{\alpha,\lambda}(t) &= 0 && \text{si } \alpha>0\\ &=1 && \text{si } \alpha=0\\ &=+\infty && \text{si } \alpha<0\end{aligned}}$$

b) Soit $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f_{\alpha,\lambda}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. De plus $f_{\alpha,\lambda}\geqslant 0$.

Étude en 0 :

D'après l'équivalent $f_{\alpha,\lambda}(t)\sim\dfrac{1}{t^{-\alpha}}$ trouvé au 1)a), comme (intégrales de Riemann en 0)

$$\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } -\alpha<1$$

par comparaison (car $f_{\alpha,\lambda}\geqslant 0$), $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>-1$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 f_{\alpha,\lambda}(t)=t^{\alpha+2}e^{-\lambda t}\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $f_{\alpha,\lambda}(t)=o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $2>1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha>-1}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout $t\in]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}=f_{-\frac12,1}(t) \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\right|\leqslant f_{-\frac12,1}(t)$$

Or $-1/2>-1$, donc d'après 1)b), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-\frac12,1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par théorème de majoration,

$$\boxed{t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad t\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0,+\infty[}$$

3) **a)** Comme cosinus est paire et sinus impaire,

$$\boxed{U \text{ est paire et } V \text{ est impaire}}$$

b) $U(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après 2.

La fonction $u \mapsto u^2$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty$ dans $]0, +\infty[$. Posons $t = u^2$, d'où $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

Par conséquent, d'après le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature – donc convergentes – et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Conclusion

$$\boxed{U(0) = \sqrt{\pi}}$$

4) **a)** Soit $\varphi = f_{\frac{1}{2},1}$. Comme $1/2 > -1$, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après 1)b).

Je mets l'étude pour que vous puissiez vérifier ce que vous avez fait.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{t}e^{-t}$. Cette fonction est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: $t^2\varphi(t) = t^{2,5}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Donc $t^2\varphi(t) = o(1)$ puis $\varphi(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après Riemann ($\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème de dérivation : Posons $h(x,t) = \dfrac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables ;
  $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}_+^*$ d'après ci-dessus, et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}e^{-t} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{W \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } W'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t.}$$

b) Effectuons une intégration par parties. Comme $\dfrac{1}{-1+ix} \neq 0$, posons

$$u = \sqrt{t} \qquad u' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$v = \frac{1}{-1+ix}e^{(-1+ix)t} \qquad v' = e^{(-1+ix)t}$$

On vérifie ses primitives. On pose u = ... etc. On commence par faire ses calculs au brouillon.

De plus, $\displaystyle\lim_{t\to0} uv = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, donc d'après le théorème d'intégration par parties, les deux intégrales suivantes sont de même nature, donc convergentes d'après 1)a), et

$$\begin{aligned}
W'(x) &= \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{i\sqrt{t}}{-1+ix}e^{(-1+ix)t}\right]_0^{+\infty} - i\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}(-1+ix)}e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{i}{2(-1+ix)}W(x)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } W \text{ est solution } (E) : y' + \frac{1}{2(x+i)} y = 0}$$

c) La fonction W est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de (E). Ainsi, W' s'exprime en fonction de W et de $x \mapsto \dfrac{1}{2(x+i)}$ qui sont $\mathscr{C}^1$: elle est donc elle-même $\mathscr{C}^1$. Par récurrence, W est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $U = \Re(W)$ et $V = \Im(W)$,

$$\boxed{\text{Les fonctions } U \text{ et } V \text{ sont de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

d) D'après la question b, $W' + \dfrac{1}{2(x+i)} W = 0$, or $W = U + iV$, donc

$$U' + iV' + \frac{x-i}{2(1+x^2)}(U+iV) = 0$$

D'où, en développant

$$U' + \frac{xU+V}{2(1+x^2)} + i\left(V' + \frac{xV-U}{2(1+x^2)}\right) = 0$$

Or $z = a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$:

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x : \begin{cases} U'(x) = -\dfrac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) = \dfrac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}}$$

5) La fonction g est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
De plus, $|g| \leqslant f_{-1/2,\lambda}$ et d'après 1)b), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-1/2,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, d'après le théorème de majoration,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$$

6) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(u+n\pi)}}{\sqrt{u+n\pi}} \sin(u+n\pi)\,\mathrm{d}t && \text{Avec le changement de variable } t = u + n\pi \\ &= \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)\mathrm{d}t && \text{Car } \sin(\theta+n\pi) = (-1)^n \sin(\theta) \end{aligned}$$

Vu le résultat à trouver, c'est un peu comme si on vous avait dit « effectuer le changement de variable $t = u + n\pi$. ». Ici l'intégrale est sur un segment dès que $n > 0$, il n'est pas nécessaire de prendre des pincettes.

Conclusion :

$$\boxed{a_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
& \forall t \in]0,\pi], && t+(n+1)\pi \geqslant t+n\pi > 0 && \\
\Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \sqrt{t+(n+1)\pi} \geqslant \sqrt{t+n\pi} > 0 \quad \text{et} \quad -\lambda(t+(n+1)\pi) \leqslant -\lambda(t+n\pi) && \\
\Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && 0 < \frac{1}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} \quad \text{et} \quad 0 < e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)} \leqslant e^{-\lambda(t+n\pi)} && \\
\Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} && \text{Car tout est } \geqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}\sin(t) \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t) && \text{Car } \sin(t) \geqslant 0 \text{ sur }]0,\pi] \\
\Longrightarrow\ & && \int_0^\pi \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}}\sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\pi \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)\,\mathrm{d}t && \text{Par croissance de l'intégrale} \\
\Longrightarrow\ & && a_{n+1} \leqslant a_n &&
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est positive comme intégrale d'une fonction positive. De plus elle est décroissante, donc elle converge.

Si vous êtes à l'aise avec le théorème de convergence dominée, il suffit de poser $f_n(t) = \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)$. On regarde ensuite la limite pour la convergence simple, qui est $f = 0$, puis on majore, par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ par exemple. Mais on peut aussi plus simplement majorer directement a_n.

Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $t \in]0,\pi]$, $0 < \sqrt{n\pi} \leqslant \sqrt{t+n\pi}$ puis

$$0 \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Donc en intégrant

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où, par encadrement,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

7) a) La suite (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle. Donc, d'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k \text{ converge}}$$

b) Toujours d'après le critère des séries alternées, S est du signe du premier terme, $(-1)^0 a_0$. Donc

$$\boxed{S > 0}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k &= \sum_{k=0}^{N}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t && \text{Par définition de } a_k \\
&= \int_0^{(N+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t && \text{Chasles}
\end{aligned}$$

La série (question 7)a)) comme l'intégrale (question 5) convergent, donc lorsque $N \to +\infty$,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k}$$

8) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto tx$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$. Posons $u = tx$, donc $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature – donc convergentes – et

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}S & \text{Avec } \lambda = \frac{1}{x} > 0 \end{aligned}$$

D'après la question 6b, $S > 0$, donc

$$\boxed{V > 0}$$

9) *Les fonctions R et T ne sortent pas du néant : $R = |W|$ et T est un argument de W (modulo π).*

a) <u>Fonction R</u> : Les fonctions U et V sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après 1c, donc en particulier continues. Donc R est prolongeable par continuité en 0, par continuité des fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement.

$$\boxed{\text{La fonction } R \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } R(0) = \sqrt{U(0)^2 + V(0)^2} = \sqrt{\pi}.}$$

<u>Fonction T</u> : Lorsque $x \to 0$, nous avons les limites suivantes par continuité de U et V en 0 et d'après les calculs de la question 3)b) :

$$\lim_{x\to 0} U(x) = U(0) = \sqrt{\pi} > 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} V(x) = V(0) = 0$$

De plus $V(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc par quotient,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{U(x)}{V(x)} = +\infty$$

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \operatorname{Arctan} t = \frac{\pi}{2}$, donc

$$\boxed{\text{La fonction } T \text{ est prolongeable par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ par } T(0) = \frac{\pi}{2}.}$$

b) *Ici, tout est dérivable, même $\mathscr{C}^\infty$, sauf $t \to \sqrt{t}$ qui n'est pas dérivable en 0. Donc il faut vérifier que V ne s'annule pas (pour $\frac{U}{V}$) et que $U^2 + V^2$ ne s'annule pas non plus (sinon on est $t = 0$ et $t \to \sqrt{t}$ n'est pas dérivable).*

Les fonctions U et V sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus T est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$.

Pour $x_0 > 0$ fixé, $V(x_0) > 0$ donc $U^2(x_0) + V^2(x_0) \geqslant V^2(x_0) > 0$. Ainsi, $x \mapsto \sqrt{U^2(x) + V^2(x)}$ est dérivable en x_0. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les fonctions } R \text{ et } T \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

c) Dérivons : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, *(On ne se précipite pas, on ne saute pas d'étape, on remplace avant de développer, etc...)*

$$\begin{aligned}
R'(x) &= \frac{2U'(x)U(x) + 2V'(x)V(x)}{2\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} \\
&= \frac{-2U(x)\frac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)} + 2V(x)\frac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)}}{2\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} && \text{D'après 1d} \\
&= \frac{-U(x)V(x) - xU^2(x) + V(x)U(x) - xV^2(x)}{2(1+x^2)\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} \\
&= \frac{-x(U^2(x)+V^2(x))}{2(1+x^2)\sqrt{U^2(x)+V^2(x)}} \\
&= -\frac{x}{2(1+x^2)}R(x)
\end{aligned}$$

Et *(Évidemment, vous avez besoin d'un brouillon et d'écrire* $(\text{Arctan } f)' = \frac{f'}{1+f^2}$, $f = \frac{U}{V}$ *donc* $f' = ...$*)*

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{\frac{U'(x)V(x)-U(x)V'(x)}{V^2(x)}}{1+\frac{U^2(x)}{V^2(x)}} \\
&= \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)+U^2(x)} \\
&= \frac{-\frac{V(x)+xU(x)}{2(1+x^2)}V(x) - U(x)\frac{U(x)-xV(x)}{2(1+x^2)}}{V^2(x)+U^2(x)} \\
&= \frac{-V^2(x) - xU(x)V(x) - U^2x) + xU(x)V(x)}{2(1+x^2)(V^2(x)+U^2(x))} \\
&= -\frac{1}{2(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{R \text{ est solution de } y' = -\frac{x}{2(1+x^2)}y \text{ et } T \text{ de } y' = -\frac{1}{2(1+x^2)} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Pour T, il était impossible de retrouver facilement du Arctan *après dérivation, donc il est logique de trouver une équation différentielle $y' = f$ avec f une fonction fixée.*

d) Résolution de $y' = -\frac{x}{2(1+x^2)}y$:

Posons $f(x) = \frac{1}{4}\ln(1+x^2)$. Comme $f'(x) = \frac{2x}{4(1+x^2)} = \frac{x}{2(1+x^2)}$, les solution de l'équation sont les y définies par

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) &= Ce^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)} \\
&= Ce^{\ln\left((1+x^2)^{-\frac{1}{4}}\right)} \\
&= \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}
\end{aligned}$$

Où $C \in \mathbb{R}$ dépend des conditions initiales.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ est Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\right)}$$

Résolution de $y' = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$:

Il suffit de primitiver : $y(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{x \mapsto -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

e) Expression de R : R est solution de la première équation donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \qquad R(x) = \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$$

Par continuité en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} R(x) = \sqrt{\pi} = C$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad R(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$$

Expression de T : T est solution de la seconde équation donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > 0, \qquad T(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$$

Par continuité en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} T(x) = \dfrac{\pi}{2} = C$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad T(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x}$$

10) Toutes les égalités suivantes sont sur $\mathbb{R}_+$.
Pour retrouver $\dfrac{U}{V}$ à partir de $\operatorname{Arctan}\dfrac{U}{V}$, il faut utiliser $\tan(\operatorname{Arctan} t)) = t$ (ce qui est toujours vrai dans ce sens là [1]) :

$$\frac{U}{V} = \tan(T)$$

De plus, en élevant au carré l'expression de R,

$$\begin{aligned}
& U^2 + V^2 = R^2 & \\
\Longrightarrow & V^2(1+\tan^2(T)) = R^2 & \text{Car } U = \tan(T)V \\
\Longrightarrow & V^2 = R^2\cos^2(T) & \text{Car } 1+\tan^2 = \tan' = \frac{1}{\cos^2} \\
\Longrightarrow & V = |R\cos(T)| &
\end{aligned}$$

Car $V > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $V(0) = 0$. Or $T = \operatorname{Arctan}\dfrac{U}{V} \in]-\pi/2, \pi/2[$ par construction, donc $\cos(T) \geqslant 0$. Par construction, $R \geqslant 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad V(x) = R(x)\cos(T(x)) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right)$$

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right)$$

1. On peut d'ailleurs vérifier que $T(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{U(x)}{V(x)} \in]-\pi/2, \pi/2[$, mais c'est inutile : c'est vrai par construction de T. Dans l'autre sens, $\operatorname{Arctan}(\tan(t)) = t$ uniquement si $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

De plus, $U = \tan(T)V = R\cos(T)\tan(T) = R\sin(T)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\text{Arctan } x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{1}{2}\text{Arctan } x\right)$$

Comme U est paire et V est impaire, de même que les membres de droite des égalités ci-dessus, les expressions trouvées sont valables sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} U(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\dfrac{1}{2}\text{Arctan } x\right) \\ V(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\dfrac{1}{2}\text{Arctan } x\right) \end{cases}}$$

Puisque $R = |W|$ et T un argument de W modulo π, on a $W = \pm(R\cos T + iR\sin T)$, d'où U et V au signe près.

11) • Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$: *$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ et si $z = a+ib$, $|z|^2 = a^2+b^2$.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1}$$

Donc une primitive sera $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - i\,\text{Arctan}\,(x)$

• Résolution de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{i}{2(ix-1)}y$:

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \mu \exp\left(-\frac{1}{4}\ln(x^2+1^2) + \frac{i}{2}\text{Arctan}\,(x)\right) = \mu\frac{e^{\frac{i}{2}\text{Arctan}\,(x)}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

où $\mu \in \mathbb{C}$.

• Comme W est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W(x) = \mu\frac{e^{\frac{i}{2}\text{Arctan}\,(x)}}{(x^2+1)^{1/4}}$$

Comme $W(0) = U(0) + iV(0) = \sqrt{\pi}$, on a $\mu = W(0) = \sqrt{\pi}$, et, par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{W(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}} e^{\frac{i}{2}\text{Arctan}\,(x)}}$$

• En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on retrouve bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}\,(x)\right) \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{1}{2}\text{Arctan}\,(x)\right)$$

On retrouve bien les expressions données à la question précédente.

12) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos^n(xt)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-1/2,1}(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin^n(xt)\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-1/2,1}(t).$$

Or $f_{-1/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1b) : $-1/2 > -1$), donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos^n(xt)$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin^n(xt)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure en particulier l'existence de $U_n(x)$ et $V_n(x)$.

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
U_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^2(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1+\cos(2xt)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(2xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2}\left(U(0) + U(2x)\right) \\
\text{et}\quad V_2(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^2(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1-\cos(2xt)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(2xt)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2}\left(U(0) - U(2x)\right).
\end{aligned}$$

b) Si $x = 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n(0) = U(0) \underset{n\to+\infty}{\to} U(0)$.
Prenons pour la suite $x \neq 0$.

- Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}|\cos^n(xt)|$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}|\cos^n(xt)| \underset{n\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si } xt \notin \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \notin \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \\ \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} & \text{si } xt \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \end{cases}$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction

$$f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \\ \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in \frac{\pi}{x}\mathbb{Z} \end{cases}$$

De plus, sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, f a un nombre fini de point de discontinuité ($[a, b] \cap \frac{\pi}{x}\mathbb{Z}$) et, en chacun de ces points, f a une limite nulle à droite et à gauche, donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t),$$

où $\varphi = f_{-1/2,1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (toujours d'après la question 1b).

- D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

⋆ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire généralisée (les intégrales convergent)

$$|U_n(x)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos^n(xt)|\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0,$$

donc, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0.$$

FIN DE L'ÉPREUVE