Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (INP 2018 PC)

Partie 1 (Quelques résultats généraux)

1) n=0 : $U_0 = (X^2-1)^0 = 1$ et $\boxed{L_0 = U_0^{(0)} = 1}$

n=1 : $U_1 = X^2 - 1$ et $\boxed{L_1 = \frac{1}{2^1 1!} U_1' = X}$

n=2 : $U_2 = (X^2-1)^2$ donc $U_2' = 2(2X)(X^2-1) = 4(X^3 - X)$ et $U_2'' = 4(3X^2-1)$. Comme $L_2 = \frac{1}{2^2 2!} U_2''$,

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)}$$

2) Comme $\deg(X^2-1) = 2$, $\deg U_n = 2n$. De plus la formule du binome de Newton nous donne :

$$U_n = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{2n-2k} = X^{2n} + Q \qquad \text{avec} \qquad Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

En dérivant n fois, il vient

$$\begin{aligned} U_n^{(n)} &= 2n(2n-1)\dots(2n-n+1)X^n + Q^{(n)} \qquad \text{où } \deg Q^{(n)} = \deg Q - n \leqslant n-1 \\ &= \frac{(2n)!}{n!} X^n + Q^{(n)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{L_n \text{ est de degré } n \text{ et } a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}$$

On vérifie évidemment toutes ses formules sur les polynômes L_0, L_1, L_2 (et L_3 si vous n'avez pas confiance en vous), comme toujours dans ce genre de sujet sur une famille de polynômes. On vous demandait d'ailleurs fort aimablement de les calculer à la première question.
Pour trouver la formule, on n'hésite pas à utiliser des pointillés, et à ajuster les derniers termes du produit en testant pour n petit.

3) Montrons que $(L_0, \dots, L_n)$ est libre : Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \tag{1}$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Notons alors

$$i_0 = \max\{i \mid \lambda_i \neq 0\}$$

(Cet ensemble est non vide et majoré par n donc admet un maximum). Ainsi, pour tout $i > i_0$, $\lambda_i = 0$ et l'équation 1 s'écrit alors

$$\sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i L_i = 0$$

En isolant L_{i_0}, comme $\lambda_{i_0} \neq 0$ par construction,

$$L_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i L_i$$

Et en regardant les degrés [1], le membre de droite est de degré au plus $i_0 - 1$ et celui de gauche de degré i_0 (d'après 2). Ce qui est absurde.
Ainsi, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et

La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre.

De plus c'est une famille de $n+1$ vecteurs et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \big[(X-1)(X+1)\big]^n = (X-1)^n(X+1)^n$$

Ainsi,

$$\boxed{U_n \text{ a pour racines 1 de multiplicité } n \text{ et } -1 \text{ de multiplicité } n}$$

Caractérisation de la multiplicité d'une racine :

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ racine d'ordre } m \in \mathbb{N}^* \text{ de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

En phrases : il y a exactement m annulations en dérivant (de $P^{(0)}(\alpha) = 0$ à $P^{(m-1)}(\alpha) = 0$). Les polynômes, c'est un peu du Python, on commence à compter à partir de 0.
Ce qui entraine en particulier : (α racine d'ordre $m > 1$ de P) $\Longrightarrow$ (α racine d'ordre $m-1$ de P').
Donc $\alpha = 1$ est racine d'ordre $n-1$ de U_n', et de meme pour $\alpha = -1$:

$$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X]$$

De plus $\deg U_n' = 2n-1$ donc $\deg Q = 1$. Ainsi, $Q = \lambda(X - \alpha)$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\alpha \in]-1, 1[$. La fonction polynomiale U_n est continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ puisque $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $U_n(1) = U_n(-1) = 0$. Donc le théorème de Rolle s'écrit

$$\exists c \in]-1, 1[, \qquad U_n'(c) = 0$$

Ainsi, comme il ne reste plus qu'une seule racine de U_n', α, qui ne vaut ni 1 ni -1, $\alpha = c \in]-1, 1[$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in]-1,1[\text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que : } U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)}$$

1. Dans les polynômes, il faut toujours regarder le degré : c'est nombre entier, ce qui est plus facile à comprendre qu'un polynôme, et il donne beaucoup d'informations – par exemple il majore le nombre de racines. Ici comparer les degrés suffit à prouver que la famille est libre : toute famille de degré échelonné est libre.

5) Comme $n-k>0$, $\alpha_0=-1$ et $\alpha_{k+1}=-1$ sont des racines de $U_n^{(k)}$ par hypothèse. Quitte à réordonner les α_i, on peut les supposer rangés par ordre croissant :

$$-1=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k<\alpha_{k+1}=1$$

Pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, dérivable sur $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ et $U_n^{(k)}(\alpha_i)=U_n^{(k)}(\alpha_{i+1})=0$. Donc, comme $(U_n^{(k)})'=U_n^{(k+1)}$, le théorème de Rolle nous dit

$$\exists\beta_i\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\qquad U_n^{(k+1)}(\beta_i)=0$$

Fixons $\beta_0,\dots,\beta_k$ qui convienne. Les β_i sont dans des intervalles disjoints, ils sont donc distincts et même $-1<\beta_0<\cdots<\beta_k<1$. De même qu'au 4, 1 et -1 sont des racines d'ordre $n-k-1$ de $U_n^{(k+1)}$. Donc

$$U_n^{(k+1)}=(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\dots(X-\beta_{k+1})Q\quad\text{avec}\quad Q\in\mathbb{R}[X]$$

En regardant prenant le degré, on trouve $\deg Q=0$. C'est-à-dire $Q=\nu\in\mathbb{R}^*$. En conclusion :

Il existe des réels $\beta_0,\dots,\beta_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)}=\nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_0)\cdots(X-\beta_k)$$

6) Supposons $n\geqslant 2$. Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathcal{H}_k$: Il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)}=\mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

est vraie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

- $\mathcal{H}_1$: a été montré à la question 4. *On pouvait aussi partir de $\mathcal{H}_0$, en adaptant un peu la propriété.*
- $\mathcal{H}_k\implies\mathcal{H}_{k+1}$: Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. À la question 5, nous avons prouvé qu'il existe des réels $\beta_0,\dots,\beta_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

  $$U_n^{(k+1)}=\nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_0)\cdots(X-\beta_k)$$

  C'est-à-dire $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

En particulier pour $k=n$: Il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(n)}=\mu(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)=\mu\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$$

Ce résultat est aussi vrai pour $n=1$: $U_1'=2X$ et $\alpha_1=0\in]-1,1[$. Comme L_n est égal à $U_n^{(n)}$ à un scalaire près,

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $]-1,1[$.

Partie 2 (Étude des éléments propres de l'endomorphisme φ)
Soiti n un entier naturel.

7) Montrons que φ est linéaire : Soit $P,Q\in\mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q)&=(X^2-1)(\lambda P+Q)''+2X(\lambda P+Q)'\\&=\lambda(X^2-1)P''+(X^2-1)Q''+2\lambda XP'+2XQ'\\&=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.
Endomorphisme : Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P)$ est un polynôme.
Pour ce point, il s'agit surtout de montrer au correcteur que vous saviez quoi regarder – il n'y a rien à faire.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

8) Montrons que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned}
Q \in \varphi(\mathbb{R}_n[X]) &\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad Q = \varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' \\
&\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg Q \leqslant \max(\deg((X^2-1)P''), \deg(XP')) \\
&\text{Or } \deg((X^2-1)P'') = 2 + \deg(P'') \leqslant 2 + \deg P - 2 \leqslant n \text{ et } \deg XP' \leqslant n \text{ de même.} \\
&\Longrightarrow \deg Q \leqslant n \\
&\Longrightarrow Q \in \mathbb{R}_n[X]
\end{aligned}$$

On remarque que, si $n = 0$ ou 1, $P'' = 0$ et le premier terme de $\varphi(P)$ est nul. D'où la majoration : $\deg((X^2-1)P'') \leqslant 2 + \deg P - 2$. Le polynôme P'' peut être nul, et son degré $-\infty$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \varphi}$$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Comme $f(F) = \{f(x) \mid x \in F\}$, on peut aussi rédiger ainsi :

$$\begin{aligned}
x \in F &\Longrightarrow \dots \\
&\Longrightarrow f(x) \in F
\end{aligned}$$

9)

- <u>$n = 1$</u> : $\mathbb{R}_1[X]$ a pour base canonique $(1, X)$.
  - $\varphi_1(1) = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 0 = 0$
  - $\varphi_1(X) = (X^2-1) \times 0 + 2X \times 1 = 2X = 0 \times 1 + 2 \times X$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \varphi_1(1) & \varphi_1(X) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \end{array}$$

- <u>$n = 2$</u> : $\mathbb{R}_2[X]$ a pour base canonique $(1, X, X^2)$.
  - $\varphi_2(1) = 0$
  - $\varphi_2(X) = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2$
  - $\varphi_2(X^2) = (X^2-1) \times 2 + 2X \times 2X = -2 \times 1 + 0 \times X + 6X^2$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_2(1) & \varphi_2(X) & \varphi_2(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

- <u>$n = 3$</u> : $\mathbb{R}_3[X]$ a pour base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
  - $\varphi_3(1) = 0$
  - $\varphi_3(X) = 1$
  - $\varphi_3(X^2) = -2 \times 1 + 0 \times X + 4X^2 + 0 \times X^3$
  - $\begin{aligned} \varphi_3(X^3) &= (X^2-1) \times 6X + 2X \times 3X^2 \\ &= 12X^3 - 6X \end{aligned}$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi_3(1) & \varphi_3(X) & \varphi_3(X^2) & \varphi_3(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

- <u>$n \in \mathbb{N}^*$</u> : Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après 8), φ laisse stable $\mathbb{R}_k[X]$, donc $\varphi_n(X^k) = \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi

$$\varphi_n(X^k) = m_{0,k} + m_{1,k}X + \dots + m_{k,k}X^k$$

Donc

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est triangulaire supérieure}}$$

De plus *(un calcul effectif de $\varphi_n(X^k)$ n'est pas très compliqué)*

$$\begin{aligned}\varphi_n(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2X(kX^{k-1})\\ &= \Big(k(k-1)+2k\Big)X^k - k(k-1)X^{k-2}\\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad m_{k,k} = k(k+1)}$$

10) La matrice M est triangulaire, donc ses éléments diagonaux $m_{k,k} = k(k+1)$ sont ses valeurs propres. Or les $((k(k+1))_{0\leqslant k\leqslant n}$ sont deux à deux distincts : φ_n admet $n+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes. En conclusion,

$$\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable}}$$

11) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. $U_k = (X^2-1)^k$ et $U_k' = k(2X)(X^2-1)^{k-1}$. Donc

$$(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = (X^2-1)k(2X)(X^2-1)^{k-1} - 2kX(X^2-1)^k = 0$$

Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!], \quad (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0}$$

12) Rappel de la formule de Leibniz : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Comme toujours, commencer par écrire la formule avec les notations du cours, puis traduire dans celles de l'énoncé. Si vous ne vous souvenez plus de la formule, juste qu'il est question de $(fg)^{(n)}$ et qu'il y a une somme, testez les premiers termes : $(fg)'$, $(fg)''$ et $(fg)'''$. Vous reconnaîtrez la formule du binôme et retrouverez la formule.

En dérivant $(k+1)$ fois $\Big[(X^2-1)U_k'\Big]$, comme $(X^2-1)^{(i)} = 0$ pour tout $i > 2$,

$$\begin{aligned}\Big[(X^2-1)U_k'\Big]^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} U_k^{(k+1-i+1)}\\ &= \sum_{i=0}^{2} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} U_k^{(k+1-i+1)}\\ &= \binom{k+1}{0}(X^2-1)U_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1}(2X)U_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2}(2)U_k^{(k)}\\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + (k+1)kU_k^{(k)}\end{aligned}$$

De même pour $2kXU_k$,

$$\begin{aligned}\Big[2kXU_k\Big]^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{1} \binom{k+1}{i} (2X)^{(i)} U_k^{(k+1-i)}\\ &= (2kX)U_k^{(k+1)} + 2(k+1)kU_k^{(k)}\end{aligned}$$

Donc, en dérivant $(k+1)$ fois le membre de gauche de la relation de la question 11, il vient

$$\begin{aligned}&= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + (k+1)kU_k^{(k)} - (2kX)U_k^{(k+1)} - 2(k+1)U_k^{(k)}\\ &= \Big[(X^2-1)\Big]U_k^{(k+2)} + \Big[2(k+1)X - 2kX\Big]U_k^{(k+1)} + \Big[(k+1)k - 2(k+1)k\Big]U_k^{(k)}\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0}$$

13) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $L_k = \dfrac{1}{2^k k!} U_k^{(k)}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(L_k) &= (X^2-1)L_k'' + 2XL_k' \\
&= \frac{1}{2^k k!}\left((X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2^k k!}\left(k(k+1)U_k^{(k)}\right) && \text{D'après la question 12} \\
&= k(k+1)L_k
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \varphi_n(L_k) = k(k+1)L_k}$$

Comme $L_k \neq 0$, L_k est un vecteur propre pour la valeur propre $k(k+1)$.

14) D'après la question 13, La matrice de φ_n dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ est

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 (PT 2015 A)

Partie 1 **1)** **a)** Matriciellement, $f(e_1)$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ de la matrice, donc dans la base canonique

$$\boxed{f(e_1) = (-7, 9, 7, -4)}$$

De même, matriciellement $f^2(e_1) = f(f(e_1))$ s'écrit $A \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}$, et il vient

$$\boxed{f^2(e_1) = (-30, -90, -70, 40)}$$

b) Comme $\begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$100e_1 + 10f(e_1) + f^2(e_1) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est liée}}$

2) De même $f(e_2)$ a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, et $f^2(e_2)$, $\begin{pmatrix} 160 \\ -70 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$, donc

$$100e_2 + 10f(e_2) + f^2(e_2) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (e_2, f(e_2), f^2(e_2)) \text{ est liée}}$

On peut résoudre le système $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f^i(e_2) = 0$ et on trouve des λ_i qui conviennent, ou en lisant les dernières questions conjecturer que $100, 10$ et 1 vont convenir.

3) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 f(e_2) = 0 \implies \lambda_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7\\9\\7\\-4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -16\\-3\\-4\\-7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 & -7\lambda_2 & & -16\lambda_4 = 0 \\ & 7\lambda_2 & & -4\lambda_4 = 0 \\ & 9\lambda_2 & +\lambda_3 & -3\lambda_4 = 0 \\ & -4\lambda_2 & & -7\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 & -7\lambda_2 & & -16\lambda_4 = 0 \\ & 7\lambda_2 & & -4\lambda_4 = 0 \\ & & +\lambda_3 & (-3 + \frac{9}{7} \times 4)\lambda_4 = 0 \\ & & & \underbrace{(-7 - \frac{4}{7})}_{\neq 0} \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.
De plus $\mathrm{Card}\,((e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ donc

$$\boxed{(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

4) Montrons que la relation $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est vérifiée pour les vecteurs de la base précédente :
D'après un calcul effectué au 1),

$$f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0$$

Donc, en appliquant f, linéaire, il vient

$$f(f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1) = f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1) = f(0) = 0$$

Donc la relation est vérifiée par e_1 et $f(e_1)$.
D'après le calcul effectué au 2), il en est de même pour e_2 et $f(e_2)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^4$, comme $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ on peut écrire

$$x = x_1 e_1 + x_2 f(e_1) + x_3 e_2 + x_4 f(e_2)$$

D'où, par linéarité de f et f^2, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^4,\ f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0}$

5)

$$\begin{cases} f(e_1) &=& 0 \times e_1 + 1 \times f(e_1) + 0 \times e_2 + 0 \times f(e_2) \\ f^2(e_1) &=& -100e_1 - 10f(e_1) \\ f(e_2) &=& f(e_2) \\ f^2(e_2) &=& -100e_2 - 10f(e_2) \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}}$$

Partie 2

1) Soit $y \in E_x = \text{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
(Comme d'habitude : on prend $f(y) \in f(E_x)$ et on montre que $f(y) \in E_x$.)
Le vecteur y est une combinaison linéaire (la somme est donc finie) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$y = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Ainsi, $f(y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \alpha_n f(x_n) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_{n+1} \in E_x$
Conclusion : $\boxed{E_x \text{ est stable par } f}$

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f.
Par une récurrence immédiate, F est stable par f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $x \in F$ entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^n(x) \in F$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, F est stable par combinaison linéaire, donc

$$E_x = \text{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset F$$

Conclusion : $\boxed{E_x \subset F}$

3) **a)** Comme $(x_n)_{0\leqslant n\leqslant d}$ est une famille de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^d$, de dimension d, elle est nécessairement liée.
De plus $x_0 = x \neq 0$, donc (x_0) est libre.
Donc l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{N} | (x_0, \ldots, x_{p-1}) \text{est libre}\}$ est non vide et majoré (par d), il admet un plus grand élément p.

b) Par définition de p, $(x_0, \ldots, x_p)$ est liée : soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \neq (0, \ldots, 0)$$

Montrons par l'absurde que $\alpha_p \neq 0$: Supposons $\alpha_p = 0$. L'égalité ci-dessus s'écrit

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$$

Or $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ libre, donc $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) = 0$: ainsi tous les α_i sont nuls, ce qui est absurde.
Donc $\alpha_p \neq 0$. En posant $a_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_p}$, l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0$ s'écrit

$$\boxed{x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i}$$

c) Soit $y \in E'_x = \text{Vect}(\{x_0, \ldots, x_{p-1}\})$.

$$y = \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n x_n \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{n=0}^{p-1} \alpha_n f(x_n) \\ &= \alpha_0 x_1 + \cdots + \alpha_{p-2} x_{p-1} + \alpha_{p-1} x_p \\ &= \alpha_0 x_1 + \cdots + \alpha_{p-2} x_{p-1} + \alpha_{p-1} \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i \in E'_x \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E'_x \text{ est stable par } f}$

d) • $\boxed{\subset}$ D'après c), E'_x est stable par f. De plus, $x \in E'_x$ par construction. Donc d'après 2)

$$E_x \subset E'_x$$

On pouvait faire cette inclusion directement, mais on vous demande de déduire le résultat de la question précédente. D'ailleurs toujours traquer les questions **en déduire** *: souvent ce sont des questions relativement facile, qui teste votre capacité à lire l'énoncé.*

• $\boxed{\supset}$ Comme $\{x_0, \dots, x_{p-1}\} \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, en passant aux espaces vectoriels engendrés :

$$E'_x \subset E_x$$

Conclusion : $\boxed{E_x = E'_x}$

Par construction de p, $\mathscr{B}_p$ est libre. Par construction de E'_x, $\mathscr{B}_p$ est génératrice de E'_x, c'est donc une base de E'_x.

Comme $E'_x = E_x$, $\boxed{\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1}) \text{ est une base de } E_x}$

Là aussi, c'était faisable : juste glaner les informations.

4) Pour tout $i < p-1$, $f(x_i) = x_{i+1}$.

Pour $i = p-1$, $f(x_{p-1}) = x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$ d'après 3)b).

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

5) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \widehat{f}^i = 0$$

Par définition de $\widehat{f}$ et de x_i, $\widehat{f}^i(x) = x_i$ pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$. Donc en évaluant en x l'égalité précédente :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \widehat{f}^i(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$$

Or $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est libre par construction, donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) = (0, \dots, 0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}_{E_x}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \dots, \widehat{f}^{p-1}) \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(E_x)}$

La première égalité porte sur des fonctions. Quand vous avez des fonctions, vous pouvez toujours les évaluer en une valeur bien choisie. Ici il n'y a qu'un élément de $\mathbb{R}^d$ qui a quelque chose de particulier : c'est x, choisi et fixé depuis le début.

6) **a)** Soit $k < p$. D'après 3)b),

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

En appliquant $\widehat{f}^k$, linéaire, il vient $\widehat{f}^k(x_p) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^k(x_i)$

Comme $x_i = f^i(x) = \widehat{f}^i(x)$, l'égalité s'écrit $\widehat{f}^{k+p}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^{k+i}(x)$ puis

$$\boxed{\widehat{f}^p(x_k) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x_k)}$$

b) D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\widehat{f}^p(x_k) - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1}(x_k) - \cdots - a_1\widehat{f}(x_k) - a_0 \operatorname{id}_{E_x}(x_k) = 0$$

Or $\mathscr{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x. L'endomorphisme $g = \widehat{f}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i$ de E_x étant nul sur une base de E_x, il est identiquement nul :

$$\boxed{\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1\widehat{f} - a_0 \operatorname{id}_{E_x} = 0}$$

Partie 3 **1)** Soit $x \in E$.

a) Comme $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, en particulier $E = E_1 + \cdots + E_p$, donc

$$\boxed{\text{Il existe des vecteurs } x_i \in E_i \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i}$$

Cette décomposition est unique par définition de la somme directe de p sous-espace vectoriel.

b) Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $\sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i = 0$.

Comme $\mu_i x_i \in E_i$ et que $\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ (la somme des E_i est directe), pour tout $i \leqslant q$, $\mu_i x_i = 0$.

Or par hypothèse, $x_i \neq 0$ pour tout $i \leqslant q$. Donc $\mu_i = 0$ pour tout $i \leqslant q$.

Finalement, $\boxed{(x_1, \ldots, x_q) \text{ est libre}}$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i$$

est vraie pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $f^0(x) = \operatorname{id}_E(x) = x = \sum_{i=1}^{q} x_i$ par définition de q et des x_i.

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $k < q-1$ et $\mathcal{H}_k$ vraie : $f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i$. En appliquant f linéaire,

$$f^{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k f(x_i) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^{k+1} x_i$$

  car $f(x_i) = \lambda_i x_i$ pour tout i. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k \in [\![0, q-1]\!] \qquad f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i}$

d) *Il faut se laisser guider par l'enchaînement des questions qui précède. On vous a demandé de calculer $f^k(x)$, remplacez et regardez ce qui se passe.*

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) &= \alpha_0 \sum_{i=1}^{q} x_i + \alpha_1 \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i + \cdots + \alpha_{q-1} \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^{q-1} x_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[\alpha_0 x_i + \alpha_1 \lambda_i x_i + \cdots + \alpha_{q-1} \lambda_i^{q-1} x_i\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \cdots + \alpha_{q-1} \lambda_i^{q-1}\Big] x_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[P(\lambda_i)\Big] x_i
\end{aligned}$$

Or d'après 1)b) la famille $(x_1, \dots, x_q)$ est libre :

$$\sum_{i=1}^{q} \Big[P(\lambda_i)\Big] x_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1, q]\!]\ P(\lambda_i) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le polynôme } P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1} \text{ admet } \lambda_1, \dots, \lambda_q \text{ comme racines}}$

e) Supposons qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) = 0$$

D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1}$ de degré $q-1$ admet q racines. Donc c'est le polynôme nul :

$$P = 0$$

Toujours le même gag avec les polynômes : compter les racines, et jeter un coup d'oeil au degré. S'il y en a trop, bim ! $P = 0$.

Donc tous les coefficients sont nuls : $(\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) = (0, \dots, 0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)) \text{ est libre}}$

f) Montrons que la famille de $q+1$ vecteurs $(x, \dots, f^q(x))$ est liée.

D'après 1)c), $\forall k < q$, $f^k(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i \in \text{Vect}\left(\{x_i | 1 \leqslant i \leqslant q\}\right.$.

Donc $(x, f(x), \dots, f^q(x))$ est une famille du sous-espace vectoriel $\text{Vect}\,(x_1, \dots, x_q)$.

Or d'après 1)b), $\dim \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_q) = q$ car la famille $(x_1, \dots, x_q)$ est libre.

Donc il y a « trop » de vecteurs dans la famille $(x, f(x), \dots, f^q(x))$: la famille est liée.

Comme de plus $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre, q est le plus grand entier p tel que $(x, \dots, f^{p-1}(x))$ soit libre. D'après le résultat de la question Partie 2, 3)d) – les résultats de la partie 2 restent valable sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie quelconque,

$$\boxed{E_x = \text{Vect}\,(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))}$$

On a donc montré ci-dessus que $E_x = \text{Vect}\,(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)) \subset \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$. Or les deux familles sont libres, par conséquent,

$$\dim \text{Vect}\,(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)) = q = \dim \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_q)$$

Donc par inclusion et égalité des dimensions (et comme $x_{q+1} = \cdots = x_p = 0$),

$$\boxed{E_x = \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_q) = \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)}$$

2) D'après Partie 2, 2), qui reste valable, $E_x \subset F$. Ce qui signifie, d'après 1)f),

$$\text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p) \subset F$$

Donc en particulier, comme $x_i \in \text{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$,

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad x_i \in F$$

Comme $x_i \in E_i$ par construction, il vient

$$\boxed{\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad x_i \in F_i}$$

FIN DE L'ÉPREUVE