Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.* Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie 1 (Quelques résultats généraux)

1) Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

2) Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

3) Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

5) Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle. On précisera bien ses hypothèses et sa conclusion.

6) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \ldots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie 2

Soiti n un entier naturel.

7) Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

8) Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ. Cet endomorphisme φ_n est donc défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_n(P) = \varphi(P)$$

9) On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Déterminer M lorsque $n = 1$, 2 et 3.
Pour n quelconque, montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

10) (5/2) Montrer que φ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question 9.*

11) Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

12) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

13) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer $\varphi_n(L_k)$.

14) Déterminer la matrice D de φ_n dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

Exercice 2

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1) **a)** Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.

b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

2) Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.

3) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

4) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.

5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 2

On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & x \\ \forall n \geqslant 0 \quad x_{n+1} & = & f(x_n) \end{array} \right.$$

On note $E_x = \operatorname{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

1) Montrer que E_x est stable par f.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.

3) Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, \dots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

a) Justifier l'existence d'un tel p.

b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

c) On note $E'_x = \mathrm{Vect}\,(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4) On note $\widehat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x.
Donner la matrice de $\widehat{f}$ dans la base $\mathscr{B}_p$.

5) Montrer que la famille $(\mathrm{id}_{E_x}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \dots, \widehat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_x)$.

6) **a)** Montrer que pour tout $k < p$,

$$\widehat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x_k)$$

b) En déduire que l'on a

$$\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1 \widehat{f} - a_0\,\mathrm{id}_{E_x} = 0$$

Partie 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Soit λ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ des réels deux à deux distincts et E_i des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\forall x \in E_i,\ f(x) = \lambda_i x$.

1) Soit $x \in E$.

a) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_i \in E_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

Cette décomposition est-elle unique ?

b) Notons q le nombre de vecteurs x_i non nuls dans la décomposition précédente et supposons pour simplifier que ce sont les q premiers. Montrer que $(x_1, \dots, x_q)$ forme une famille libre.

c) Exprimer $f^k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant q-1$ en fonction des $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$.

d) Supposons qu'il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) = 0$$

Montrer que le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1}$ admet $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ comme racines.

e) Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre.

f) Montrer que $E_x = \mathrm{Vect}\,(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ puis que $E_x = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_p)$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On note $F_i = F \cap E_i$. Soit $x \in F$. On décompose x comme précédemment :

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

avec $x_i \in E_i$.
Déduire de la question précédente que $x_i \in F_i$.

FIN DE L'ÉPREUVE