

Épreuve de Mathématiques 5

Correction

Exercice 1 (Concours national marocain 2010, partiel)

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_f(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ x-2 & x-2 & 1 \\ x-2 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
& \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\
&= (x-2)(x-1)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(x) = (x-2)(x-1)^2}$$

2) D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont

- $\lambda = 2$, de multiplicité $\alpha = 1$;
- $\lambda = 1$, de multiplicité $\alpha = 2$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(A) = 2 + 2 = 4 = 2 + 1 + 1$.

- Calcul de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(2I_3 - A)$:

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2 &\iff (2I_3 - A)X = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff x_2 = x_3 = x_1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$

- Calcul de $E_1 = \text{Ker}\,(I_3 - A)$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1 \iff (I_3 - A)X = 0$$
$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad - 2x_2 = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$
$$\iff x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 = x_1$$

Ainsi $\boxed{E_1 = \text{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})}$

Par conséquent $\dim E_1 = 1 < 2$ donc

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) Calculons : $$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, $x \in \text{Ker}\,(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \iff (A - I_3)^2 X = 0 \iff \boxed{x_1 + x_2 - x_3 = 0}$

$$\boxed{\dim \text{Ker}\,(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = 2}$$

4) Après calcul matriciel, $e_1 = (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2) = (-2, 0, -2) \in E_1$.

a) Puisque e_3 est un vecteur propre de f, $e_3 \in E_1 = \text{Vect}\,((1,0,1))$ ou $e_3 \in E_2 = \text{Vect}\,((1,1,1))$. Or la deuxième composante de e_3 est égale à 1, donc $e_3 \notin E_1$. Par conséquent $e_3 \in E_2$ et

$$\boxed{e_3 = (1, 1, 1)}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(P) = -2 \neq 0$,

$$\boxed{\text{la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

et P est la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base.

b) $e_1 \in E_1$ et $e_3 \in E_2$, donc $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Donc B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Or $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f(e_2) = e_1 + e_2$

(on peut se douter que la matrice cherchée est triangulaire, donc que seuls e_1 et e_2 interviennent, ce qui simplifie la recherche des coordonnées).

Conclusion : $$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A = PBP^{-1}}$$

c) *Première méthode : on calcule B^n pour quelques n (2, 3, 4) et on conjecture une formule – au brouillon – que l'on prouve par récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $B^0 = I_3$ est vrai.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

Seconde méthode : on utilise la formule du binôme de Newton, après avoir bien vérifié que D et N ***commutent****.*

Remarquons que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

Comme D et N commutent, nous pouvons donc appliquer la formule du binôme de Newton

$$B^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

De plus, $N^2 = 0$, donc $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Il reste donc

$$\begin{aligned} B^n &= \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 1^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de A^n : $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$.

[insérer ici un pivot de Gauss pour inverser P] $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Finalement, $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad A^n = \begin{pmatrix} -2 & -2n+1 & 2^n \\ 0 & -1 & 2^n \\ -2 & -2n & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n - 2n & 2^n - 1 & -2^n + 2n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n & -2^n + 1 \\ 2^n - 2n - 1 & 2^n - 1 & -2^n + 2n + 2 \end{pmatrix}}$

On vérifie rapidement le calcul de A^n en $n = 0$ et $n = 1$, on retrouve bien I_3 et A : c'est sans doute juste.

Exercice 2 (PT 2017)

Partie 1 **1)** *Les 5/2 remarqueront que c'est une matrice **symétrique réelle**, donc diagonalisable. Les 3/2 répondront aux questions 1 et 2 simultanément.*

Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+1 & x-1 & 1 \\ x+1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ & \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\ &= (x+1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_A(x) = (x+1)(x-2)^2}$$

Les valeurs propres de A sont

- $\lambda = 2$, de multiplicité $\alpha = 2$;
- $\lambda = -1$, de multiplicité $\alpha = 1$.

On vérifie évidemment avec la trace : $\mathrm{Tr}\,(A) = 3 = 2 + 2 - 1$.

Comme la dimension d'un sous-espace propre est encadrée entre 1 et la multiplicité de la valeur propre ($1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant \alpha$), $\dim E_{-1} = 1$. Reste à vérifier la dimension de E_2.

Calcul de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(2I_3 - A)$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_2 &\iff (2I_3 - A)X = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\iff x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

Conclusion : Nous venons de montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$, $\dim E_\lambda = \alpha$. Ainsi, d'après le théorème de diagonalisation,

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable}}$$

2) Lors de la question précédente, nous avons montré que les valeurs propres de A sont
- $\lambda = 2$, de multiplicité $\alpha = 2$;
- $\lambda = -1$, de multiplicité $\alpha = 1$.

Et que $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$

Calcul de $E_{-1} = \mathrm{Ker}\,(-I_3 - A)$:

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in E_{-1} &\iff (-I_3 - A)X = 0\\
&\iff \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix} X = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0\\ & -3x_2 & +3x_3 & = 0\\ & & 0 & = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1)\\ (L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2)\end{array}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} -2x_1 + 2x_3 & = 0\\ x_2 & = x_3 \end{array}\right.\\
&\iff x_1 = x_2 = x_3\\
&\iff X = \begin{pmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$

3) $A^2 = \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\-1 & 3 & -1\\-1 & -1 & 3\end{pmatrix} = A + 2I_3$. Pour $n \geqslant 1$, en multipliant par A^{n-1},

$$\boxed{A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}}$$

4) Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1\\ u_1 & = & 1\\ \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} & = & u_n + 2u_{n-1}\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} v_0 & = & 0\\ v_1 & = & -1\\ \forall n \geqslant 1, \quad v_{n+1} & = & v_n + 2v_{n-1}\end{array}\right.$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad A^n = \begin{pmatrix}u_n & v_n & v_n\\v_n & u_n & v_n\\v_n & v_n & u_n\end{pmatrix}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $A^0 = I_3 = \begin{pmatrix}u_0 & v_0 & v_0\\v_0 & u_0 & v_0\\v_0 & v_0 & u_0\end{pmatrix}$, donc $\mathcal{H}_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $A^1 = A = \begin{pmatrix}u_1 & v_1 & v_1\\v_1 & u_1 & v_1\\v_1 & v_1 & u_1\end{pmatrix}$, donc $\mathcal{H}_1$.

- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraies, pour un $n \geqslant 1$ fixé. D'après 3,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n + 2A^{n-1} \\ &= \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_{n-1} & u_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} & v_{n+1} \\ v_{n+1} & u_{n+1} & v_{n+1} \\ v_{n+1} & v_{n+1} & u_{n+1} \end{pmatrix} && \text{Par définition de } (u_n) \text{ et } (v_n); \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}}$

  *C'est une récurrence double, il faut impérativement vérifier $\mathcal{H}_0$ **et** $\mathcal{H}_1$, sinon on s'expose à des paradoxes du type boîte de crayons de couleur(s).*

5) Ce sont des suites récurrentes linéaires de même équation caractéristique

$$x^2 - x - 2 = 0$$

qui a pour racines $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Donc

$$\forall n \geqslant 0 \qquad u_n = a(-1)^n + b2^n \qquad \text{et} \qquad v_n = a'(-1)^n + b'2^n$$

En évaluant en $n = 0$ et $n = 1$ on trouve les systèmes

$$\begin{cases} u_0 = 1 = a + b \\ u_1 = 1 = -a + 2b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = 0 = a' + b' \\ v_1 = -1 = -a' + 2b' \end{cases}$$

qui ont pour uniques solutions

$$\begin{cases} a = 1/3 \\ b = 2/3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a' = 1/3 \\ b' = 1/3 \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+1}) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{3}((-1)^n - 2^n)}$$

Partie 2 **1)** $(2) - \lambda(1)$: $A^2 - \lambda A = (\mu^2 - \lambda\mu)V$. Donc, comme $\mu \neq 0$ et $\lambda - \mu \neq 0$,

$$\boxed{V = \frac{1}{\mu(\mu - \lambda)}(A^2 - \lambda A)}$$

$(2) - \mu(1)$: $A^2 - \mu A = (\lambda^2 - \mu\lambda)U$. Donc, comme $\lambda \neq 0$ et $\lambda - \mu \neq 0$,

$$\boxed{U = \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu)}(A^2 - \mu A)}$$

On note la symétrie des rôles joués par U et λ d'une part, et V et μ d'autre part.

(3) s'écrit

$$\begin{aligned}
A^3 &= \lambda^3 U + \mu^3 V \\
&= \frac{\lambda^3}{\lambda(\lambda-\mu)}(A^2 - \mu A) + \frac{\mu^3}{\mu(\mu-\lambda)}(A^2 - \lambda A) \\
&= \left(\frac{\lambda^2}{\lambda-\mu} - \frac{\mu^2}{\lambda-\mu}\right) A^2 + \lambda\mu\left(-\frac{\lambda}{\lambda-\mu} + \frac{\mu}{\lambda-\mu}\right) A \\
&= (\lambda+\mu)\, A^2 - \lambda\mu A
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{A^3 = (\lambda+\mu)\, A^2 - \lambda\mu A.}$$

2) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad A^p = \lambda^p U + \mu^p V$$

est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie, c'est (1).
- $\underline{\mathcal{H}_2}$: est vraie, c'est (2).
- $\underline{\mathcal{H}_{p-1}, \mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{p-1}$ et $\mathcal{H}_p$ vraies, pour un $p \geqslant 2$ fixé.

$$\begin{aligned}
A^{p+1} &= (\lambda+\mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1} && \text{(d'après 1)} \\
&= (\lambda+\mu)(\lambda^p U + \mu^p V) - \lambda\mu(\lambda^{p-1}U + \mu^{p-1}V) && \text{(d'après } \mathcal{H}_p \text{ et } \mathcal{H}_{p-1}\text{)} \\
&= (\lambda^{p+1} + \mu\lambda^p - \mu\lambda^p)U + (\mu^{p+1} + \lambda\mu^p - \lambda\mu^p)V \\
&= \lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall p \geqslant 1 \qquad A^p = \lambda^p U + \mu^p V}$

3) **a)** *C'est un classique du $A \subset B$, cf. les questions de cours sur ce modèle. On commence par écrire le début, puis le but, traduire, et essayer de compléter.*

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} f &\Longrightarrow f(x) = 0 \\
&\Longrightarrow f^p(x) = f^{p-1}(0) = 0 && (\text{où } f^0 = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n}) \\
&\Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f^p
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p}$

b) D'après 1), pour $p \geqslant 2$, $A^{p+1} = (\lambda+\mu)A^p - \lambda\mu A^{p-1}$, donc les endomorphismes associés vérifient

$$f^{p+1} = (\lambda+\mu)f^p - \lambda\mu f^{p-1}$$

Ce qui signifie

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu)f^p(x) - f^{p+1}(x).}$$

c) Montrons que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p-1}$.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} f^p &\Longrightarrow f^p(x) = 0 \\
&\Longrightarrow f^{p-1}(x) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu} f^p(x) - \frac{1}{\lambda\mu} f^{p+1}(x) \\
&\qquad\qquad = 0 - \frac{1}{\lambda\mu} f(0) = 0 \\
&\Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} f^{p-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, Ker $f^p \subset$ Ker f^{p-1}.
Pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, le résultat de la question 1 entraîne

$$\lambda\mu f^{k-1}(x) = (\lambda+\mu)f^k(x) - f^{k+1}(x).$$

Par conséquent, par récurrence Ker $f^k \subset$ Ker f^{k-1} pour $k \in [\![2, p]\!]$, puis

$$\boxed{\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f}$$

d) D'après a et c, Ker f = Ker f^p. Donc $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^p$. Le théorème du rang s'écrit

$$\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \text{Ker } f^p = \text{rg } f^p$$

Donc en passant aux matrices

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(A^p)}$$

Partie 3 **1)** Par définition du produit matriciel

$$\boxed{{}^tVU = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k}$$

2) Par associativité du produit matriciel,

$$\boxed{\left(U^tV\right)^2 = U^tVU^tV = U({}^tVU)^tV = kU^tV \quad \text{avec} \quad k = {}^tVU}$$

Comme les matrices I_n et U^tV commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme :

$$\begin{aligned} A^2 &= (aI_n + U^tV)^2 \\ &= a^2I_n + 2aU^tV + (U^tV)^2 \\ &= a^2I_n + (2a+k)\,U^tV \\ &= a^2I_n + (2a+k)\,(A - aI_n) \\ &= (2a+k)A - a(a+k)I_n \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{A^2 = \alpha A + \beta I_n \quad \text{avec} \quad \alpha = 2a+k \quad \text{et} \quad \beta = -a(a+k)}$$

3) Par définition du produit matriciel $U^tV = (u_iv_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. D'où pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\boxed{\begin{cases} a_{ii} = a + u_iv_i & \\ a_{ij} = u_iv_j & \text{si } i \neq j \end{cases}}$$

Par définition de la trace, Tr $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = na + \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$, d'où

$$\boxed{\text{Tr } A = na + {}^tV.U = na + k}$$

4) En remplaçant dans les expressions de α et β trouvées au 2),

$$\boxed{\alpha = \text{Tr } A - (n-2)a} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\beta = -a\,(\text{Tr } A - (n-1)a)}$$

5) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et $X \in \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$, un vecteur propre associé : $AX = \lambda X$. On a donc
$$A^2X = AAX = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$$
Conclusion : $\boxed{\text{Si } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } A \text{ alors } \lambda^2 \text{ est une valeur propre de } A^2}$
En remplaçant dans l'expression $A^2X = \alpha AX + \beta X$ trouvée au 2,
$$\lambda^2 X = \alpha\lambda X + \beta X$$
Or $X \neq 0$, donc
$$\boxed{\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0}$$

6) En remplaçant α et β par leurs expressions trouvées au 4, cette équation s'écrit
$$\lambda^2 - (\text{Tr } A - (n-2)a)\lambda + a(\text{Tr } A - (n-1)a) = 0$$
En évaluant en $\lambda = a$, il vient
$$a^2 - (\text{Tr } A - (n-2)a)a + a(\text{Tr } A - (n-1)a)a^2(1 + n - 2 - (n-1)) - a \text{Tr } A + a \text{Tr } A = 0$$
donc $\lambda = a$ est racine :
$$\lambda^2 - (\text{Tr } A - (n-2)a)\lambda + a(\text{Tr } A - (n-1)a) = (\lambda - a)(\lambda - b)$$
Or, en identifiant, $ab = a(\text{Tr } A - (n-1)a)$. Donc $b = \text{Tr } A - (n-1)a$. Ainsi,
$$\boxed{\text{Les deux valeurs propres possibles de } A \text{ sont } a \text{ et Tr } A - (n-1)a}$$

7) **a)** La condition Tr $U^tV \neq 0$ entraîne Tr $A \neq na$, et donc $\lambda_2 = \text{Tr}\,(A) - (n-1)a \neq \lambda_1$. Sous cette hypothèse, nous considérons deux cas possibles :

- Si l'une ou l'autre des deux valeurs candidates à être dans le spectre de A ne s'y trouve pas, il s'ensuit que l'espace E_i associé est réduit à $\{0\}$ donc le résultat est vrai.
- Si au contraire, les deux valeurs propres de A sont exactement les deux racines précédemment trouvées, nous avons deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes. D'après le cours, ces sous-espaces sont en somme directe et leur intersection se réduit au sous-espace nul.

b) **Analyse :** Cherchons l'expression de X_1 et X_2 en faisant l'hypothèse qu'ils existent.
Supposons qu'il existe une telle décomposition $X = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$. Alors
$$AX = A(X_1 + X_2) = aX_1 + (\text{Tr } A - (n-1)a)X_2$$
Il en découlerait que $AX - aX = (\text{Tr } A - na)\, X_2$ et comme Tr $A \neq na$, nous aurions
$$X_2 = \frac{1}{\text{Tr } A - na}(AX - aX) \text{ et } X_1 = X - X_2$$
Synthèse : si nous prenons les deux valeurs définies ci-dessus
$$X_2 = \frac{1}{\text{Tr } A - na}(AX - aX) \qquad \text{et} \qquad X_1 = X - X_2$$
On vérifie que l'on a :

- $X = X_1 + X_2$

- $$\begin{aligned} AX_2 &= \frac{1}{\text{Tr } A - na}\left(A^2X - aAX\right) \\ &= \frac{1}{\text{Tr } A - na}\left(\alpha AX + \beta X - aAX\right) \\ &= \frac{1}{\text{Tr } A - na}\left((\text{Tr } A - (n-2)a)AX + (-a(\text{Tr } A - (n-1)a)X - aAX\right) \\ &= \frac{1}{\text{Tr } A - na}\left((\text{Tr } A - (n-1)a)AX + (-a(\text{Tr } A - (n-1)a)X\right) \\ &= \frac{(\text{Tr } A - (n-1)a)}{\text{Tr } A - na}(AX - aX) \\ &= (\text{Tr } A - (n-1)a)X_2 \end{aligned}$$

- Comme $X_2 = \frac{1}{\text{Tr } A - na}(AX - aX)$, on a $AX = (\text{Tr } A - na)X_2 + aX$, or $X = X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned} AX_1 &= AX - AX_2 \\ &= AX - (\text{Tr } A - (n-1)a)X_2 \\ &= (\text{Tr } A - na)X_2 + aX - (\text{Tr } A - (n-1)a)X_2 \\ &= a(X_1 + X_2) - aX_2 \\ &= aX_1 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout vecteur colonne } X\text{, il existe } X_1 \in E_1 \text{ et } X_2 \in E_2 \text{ tels que } X = X_1 + X_2}$$

c) À la question 7a, nous avons établit que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, et à la question 7b, que $E_1 + E_2 = \mathbb{R}^n$. Ainsi

$$E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^n$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable}}$$

8) C'est une matrice de la forme :

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + 2I_n$$

Cette matrice J avec uniquement des 1 est classique, et vérifie $J^2 = nJ$.
Pour répondre à la question, on prend ici

$$\boxed{U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad V = -U \quad \text{et} \quad a = 2}$$

FIN DE L'ÉPREUVE