

Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Exercice 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f .
- 2) Déterminer les sous-espaces propres de f . L'endomorphisme est-il diagonalisable ?
- 3) Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.
- 4) On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2)$.
 - a) Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B .
 - c) Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Pour tous entiers strictement positifs n, p , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Pour une matrice A , tA désigne sa matrice transposée

Partie 1

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer les valeurs propres de A . Montrer que la matrice A est diagonalisable.
- 2) Déterminer les sous-espaces propres de A .
- 3) Déterminer une relation entre A^2 , A et I_3 .
En déduire une relation entre A^{n+1} , A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.

- 4) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

- 5) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n et v_n en fonction de n .

Partie 2

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \quad (1)$$

$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \quad (2)$$

$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \quad (3)$$

- 1) Exprimer U et V en fonction de A et A^2 .

En déduire que

$$A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A.$$

- 2) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

- 3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \dots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f . Soit $p \geq 2$.

a) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^p$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$

c) En déduire que $\text{Ker } f^p \subset \text{Ker } f$.

d) Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^p)$.

Partie 3

On se donne toujours un entier $n \geq 1$ fixé.

$$\text{Soit } U \text{ et } V \text{ les matrices colonnes : } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par

$$A = aI_n + U^t V.$$

- 1) Montrer que ${}^t V U$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i .

- 2) Montrer qu'il existe un réel k tel que $(U^t V)^2 = k(U^t V)$.

En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

- 3) On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V .

En déduire que $\text{Tr}(A) = na + {}^t V U$.

- 4) Exprimer α et β en fonction de a et de $\text{Tr}(A)$.

- 5) Soit λ une valeur propre de A . Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2 .

En déduire que λ vérifie l'équation

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0.$$

- 6) Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont

$$\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \text{Tr}(A) - (n-1)a.$$

- 7) On suppose que $\text{Tr}(U^t V) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par

$$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = \lambda_i X\}.$$

- a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

- b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X , il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

- c) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

- 8) Montrer que la matrice A de la première partie est de ce type.

FIN DE L'ÉPREUVE