Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (ESC Chambéry, ECT)

1) **a)** Le calcul nous donne $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

b) Pour tout entier $k \geqslant 3$, $B^k = B^3 B^{k-3} = 0.B^{k-3} = 0$.

2) $A = 3I_3 + B$. Or I_3 et B **commutent**, donc on peut écrire la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= (3I_3 + B)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k & (B^k = 0 \text{ si } k \geqslant 3) \\
&= 3^n I_3 + n3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \\
A^n &= 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right)
\end{aligned}$$

Si $n = 0$, $A^0 = I_3$, la formule est vraie ; et si $n = 1$, on retrouve aussi la bonne formule, puisque le terme en $n(n-1)$ s'annule.

3) **a)** On trouve la relation de récurrence suivante : $X_{n+1} = AX_n$. La récurrence est laissée en exercice au lecteur (mais il faut la faire ! puisqu'elle est demandée).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
X_n &= A^n X_0 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) X_0 \\
\text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= 3^n \left(X_0 + \frac{n}{3} B X_0 + \frac{n(n-1)}{18} B^2 X_0 \right) = 3^n \begin{pmatrix} 2 + 2n/3 \\ 1 + 2n/3 + n(n-1)/9 \\ -2n/3 - n(n-1)/9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

- $u_n = 3^n(2 + 2n/3)$ et a pour limite $+\infty$;
- $v_n = 3^n(1 + 2n/3 + n(n-1)/9)$ et a pour limite $+\infty$;
- $w_n = 3^n(-2n/3 - n(n-1)/9)$ et a pour limite $-\infty$.

Exercice 2 (E3A PC 2023)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par parité du cosinus,

$$I_n(-x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(-tx)\,\mathrm{d}t = I_n(x)$$

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } I_n \text{ est paire}}$$

2) Posons $D = \mathbb{R}$, $I = [0,1]$ et

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad h(x,t) = (1-t^2)^n \cos(-tx)$$

Théorème de dérivation :

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D car cosinus l'est ;
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I (intégrale sur un segment)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^n \sin(xt)$ est continue donc continue par morceaux sur I.
- La fonction $\varphi : t \mapsto t(1-t^2)^n$ est intégrable sur le segment I

$$\forall x \in D,\ \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = t(1-t^2)^n\,|\sin(xt)| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{I_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } I_n'(x) = \int_0^1 -t(1-t^2)^n \sin(xt)\,\mathrm{d}t.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par parties sur $[0,1]$: soient

$$\begin{cases} u = (1-t^2)^{n+1} & u' = -2(n+1)t(1-t^2)^n \\ v = \sin(xt) & v' = x\cos(xt) \end{cases}$$

Alors, d'après 2,

$$\begin{aligned} I_n'(x) &= \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 -2(n+1)t(1-t^2)^n \sin(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \Big(\underbrace{\Big[(1-t^2)^{n+1}\sin(xt)\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} x\cos(xt)\,\mathrm{d}t \Big) \qquad \text{Car } n+1>0 \\ &= -\frac{x}{2(n+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \cos(xt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{I_n'(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)}$$

4) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } I_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: D'après 2, I_n est $\mathscr{C}^1$. (et $\mathcal{H}_1 \Longrightarrow \mathcal{H}_0$).

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la question 2, I_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I_n'(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$$

Or I_{n+1} est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ d'après $\mathcal{H}_k$ (propriété valable *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, donc en $n+1$).
Donc I_n' est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne I_n de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } I_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}}$$

5) Calcul de $I_n(0)$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par parties sur $[0,1]$: soient

$$\begin{cases} u = t & u' = 1 \\ v = (1-t^2)^{p+1} & v' = -2(p+1)t(1-t^2)^p \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} I_{p+1}(0) &= \int_0^1 1 \times (1-t^2)^{p+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\Big[t(1-t^2)^{p+1}\Big]_0^1}_{=0} - \int_0^1 -2(p+1)t^2(1-t^2)^p\,\mathrm{d}t \qquad \text{Car } p+1>0 \\ &= -2(p+1)\int_0^1 (1-t^2-1)(1-t^2)^p\,\mathrm{d}t \\ &= -2(p+1)(I_{p+1}(0) - I_p(0)) \end{aligned}$$

D'où $I_{p+1}(0) = -2(p+1)I_{p+1}(0) + 2(p+1)I_p(0)$
Puis $(2p+3)I_{p+1}(0) = (2p+2)I_p(0)$
Et finalement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{p+1}(0) = \frac{2p+2}{2p+3} I_p(0)}$$

Le terme au carré qui apparaît suite à une intégration par parties vous rappelle quelque chose... Wallis ? C'est normal : avec le changement de variable $t = \sin(u)$, $\mathrm{d}t = \cos(u)\,\mathrm{d}u$, et les bornes $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, il vient

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(u))^n \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(u))^n \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= W_{2n+1} \end{aligned}$$

b) *Comme toujours pour ce genre de questions, testez pour les premiers termes : obtenez les expressions de $I_0(0)$, $I_1(0)$, $I_2(0)$... sans effectuer les calculs :*

$$I_0(0) = 1 \qquad I_2(0) = \frac{2+2}{2+3} I_1(0) = \frac{4 \times 2}{5 \times 3}$$

$$I_1(0) = \frac{2}{3} \qquad I_3(0) = \frac{4+2}{4+3} I_1(0) = \frac{6 \times 4 \times 2}{7 \times 5 \times 3}$$

Vous conjecturez que $I_n(0)$ est le produit des pairs sur le produit des impairs : il reste à ajuster les bornes du produit $\prod_{k=?}^{?}$, toujours avec les premiers termes.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n(0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $I_0(0) = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} I_{n+1}(0) &= \frac{2n+2}{2n+3} I_n(0) && \text{D'après 5a} \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} && (\mathcal{H}_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad I_n(0) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}}$

Or *(calcul classique, qui là aussi rappelle Wallis, et pour cause !)*

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n} 2k+1} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\prod_{k=1}^{n} (2k+1)(2k)} && \textit{On rajoute les termes manquant au dénominateur} \\ &= \frac{\left(2^n \prod_{k=1}^{n} k\right)^2}{(2n+1)!} && \textit{Les nombres pairs sont ... divisibles par 2} \\ &= \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{I_n(0) = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}}$$

Donc, à nouveau, $I_n(0) = W_{2n+1}$

6) **a)** Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(1+u)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k}$$

b) Calculons $I_n(0)$ à l'aide de la question 6a :

$$\begin{aligned}
I_n(0) &= \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t^{2k} \,\mathrm{d}t && \text{avec } u=-t^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{2k} \,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{2k+1} \\
&= n! S_n
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\boxed{S_n = \frac{1}{n!} I_n(0)}$$

Comment avoir l'idée de la preuve ? La question 6a n'est pas seulement un cadeau (car facile), c'est surtout une indication. Il faut chercher : on vous parle de formule du binôme, où peut-on l'appliquer ?

7) D'après 5b et 6b,

$$\boxed{S_n = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}}$$

Exercice 3 (CCINP PC 2020)

Partie I - Préliminaires

1) Soit $x > 0$.
$t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \frac{1}{t}$, $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$u(t)v(t) = \frac{1-\cos(t)}{t} = \frac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \frac{t^2/2+o(t^2}{t} = \frac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0.$

$u(t)v(t) = \frac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0.$

D'où, par intégration par parties, $I = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} dt$ converge.

• $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \frac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
$\frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
$t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.

3) Soit $x \geqslant 0$.
$t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\times(-x)e^{-xt}\\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$

donc $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4) • Soit $x>0$.
Pour tout $t>0$, $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$.
D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leqslant +\infty$"), on a :

$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$

• Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, donc, par encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

5) Soit $a>0$.

- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geqslant a > 0$).
- Pour tout $t>0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x \geqslant a$,
$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-xt}$$
est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $x \geqslant a$, pour tout $t>0$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t),$$
où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a>0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x \geqslant a$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt.$$

6) F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc F est dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}F'(x) &= -\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt = -\left[u(x,t)\right]_0^{+\infty} = -\left(0+\frac{1}{1+x^2}\right)\\ &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + K.$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, donc $-\dfrac{\pi}{2} + K = 0$, donc $K = \dfrac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

7)
- Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.
- Pour tout $t \in]0,1]$, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x,t)| = \left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant 1 = \varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

8) Soit $x \in [0,1]$.
• Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \times \left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right) = \frac{1}{t^2} \times \underset{t\to+\infty}{O}(1) = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.
• Posons $w'(t) = \sin(t)e^{-xt}$, $w(t) = u(x,t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.
$w(t)v(t) = \dfrac{u(x,t)}{t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
$\displaystyle\int_1^{+\infty} w(t)v'(t)dt = -\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.
D'où, par intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)dt = \int_1^{+\infty} w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned} F_2(x) = \int_1^{+\infty} u'(t)v(t)dt &= \left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt \\ &= \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt. \end{aligned}$$

9)
- Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.
- Pour tout $t \geqslant 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
- Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)|+|\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leqslant \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} dt$ est continue sur $[0,1]$.

• De plus, $x \mapsto \frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2} e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

10) • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

• On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE