Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (EPITA 2022, partiel)

1) *Il est marqué « en déduire ». Si le correcteur est sans pitié, il ne mettra aucun point si vous prouvez la convergence sans la déduire de celle de* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \sqrt{a\pi}t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective ($a > 0$). Donc le théorème de changement de variable, avec $u = \varphi(t)$, nous dit que $J(0)$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\sqrt{\pi a}}{\mathrm{d}u}$ sont de même nature, donc convergentes d'après l'énoncé, et

$$J(0) = \sqrt{\pi} \times \frac{1}{\sqrt{a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J(0) \text{ converge et vaut } \frac{1}{\sqrt{a}}}$$

2) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$, et $f(t) = e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |f(t)| = \left|e^{-\pi a t^2}\right| \left|e^{i\pi x t}\right| = e^{-\pi a t^2}$$

Or, d'après 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{\text{L'intégrale } J(x) \text{ converge}}$$

b) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \pi t e^{-\pi a t^2}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, impaire, et, par croissance comparée,

$$t^2\varphi(t) = \pi t^3 e^{-\pi a t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Donc $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Par parité, φ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.
Posons

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad h(x,t) = e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$$

<u>Théorème de dérivation</u> :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après 2a)) ;
  la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = i\pi t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ d'après ci-dessus et,

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}^2,\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|i\pi t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\right| = \pi t e^{-\pi a t^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{J \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } J'(x) = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t.}$$

c) Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Effectuons une intégration par parties. Posons

$$u = -\frac{1}{2\pi a} e^{-\pi a t^2} \qquad\qquad v = e^{i\pi x t}$$
$$u' = t e^{-\pi a t^2} \qquad\qquad v' = i\pi x e^{i\pi x t}$$

Comme $|uv| = \dfrac{1}{2\pi a} e^{-\pi a t^2}$ est de limite nulle pour $t\to\pm\infty$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} uv = 0$$

Ainsi, le théorème d'intégration par parties nous prouve que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i\pi x}{2\pi a} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature – donc convergentes d'après 2b – et

$$J'(x) = i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t = \frac{i^2\pi x}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a t^2} e^{i\pi x t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi x}{2a} J'(x)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } J \text{ est solution de l'équation différentielle : } \forall x\in\mathbb{R},\ y'(x) + \frac{\pi x}{2a} y(x) = 0}$$

d) Cette équation différentielle a pour solutions sur $\mathbb{R}$ $y(x) = Ae^{-\frac{\pi x^2}{4a}}$, avec $A\in\mathbb{R}$ fixé.
Ainsi, $J(x) = Ae^{-\frac{\pi x^2}{4a}}$, avec $A = J(0) = \dfrac{1}{sqrta}$.

$$\boxed{J(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}}$$

Comme $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_I \Re(f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_I \Im(f(t))\,\mathrm{d}t$ convergent, $K(x)$ converge et par linéarité de la partie réelle,

$$\boxed{K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{4a}}}$$

Cet exercice est un calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne $t\mapsto e^{-\pi a t^2}$. Donc on a les égalités entre questions suivantes : 2a = ex 5.1, 2b = ex 1.3 / 5.3, 2c = ex 1.4, 2d = 1.5. Sachant que l'exercice 1 était une question de cours : il faut savoir utiliser la connaissance des questions de cours lorsque vous faites un sujet.

Exercice 2 (CCINP MP 2022)

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

1) *Du x dans une borne d'intégrale ? « primitive ». Et une primitive F de f, c'est $F' = f$. Ni plus, ni moins. Pas de formule folklorique.*

H est une primitive de $h : x \mapsto e^{ix^2}$.

Comme h est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est définie et de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$$

De plus, par définition d'une primitive, $H' = h$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = e^{ix^2}}$$

2) *Pour étudier la parité, vous remplacez x par $-x$. C'est tout. Rien d'autre. Ensuite, on s'attaque à la formule écrite (pas à un autre qui vous arrange) avec les outils habituels : intégration par parties ou changement de variable ?*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $u = -t$, donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$, et sans oublier de changer les bornes,

$$\begin{aligned} H(-x) &= \int_0^{-x} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{x} e^{i(-u)^2}(-1)\,\mathrm{d}u \\ &= -H(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est impaire}}$$

3) Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $u = \varphi(t) = t^2$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \end{cases} \qquad \text{et} \quad t = x \longleftrightarrow u = t^2 = x^2$$

Donc le théorème [1] de changement de variable nous dit que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales si elles convergent. Comme la première est une intégrale sur un segment, elle converge, et

$$H(x) = \int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u.$$

4) Soit $x > 4\pi^2$ *(cette hypothèse n'est pas nécessaire, $x > 0$ suffit, mais la rédaction est plus lourde)*. D'après ci-dessus,

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une intégration par parties sur le segment [2] $[\sqrt{2\pi}, x]$

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} \qquad v = \frac{1}{i}e^{it} = -ie^{it}$$

$$u' = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} \qquad v' = e^{it}$$

1. Il faut utiliser le théorème dès que les intégrales sont généralisées. Or, ici, $1/\sqrt{u}$ n'est pas définie en 0 : l'intégrale donnée par l'énoncé est généralisée en 0.
2. L'intégration par parties ne peut pas se faire sur $]0, x^2]$, le crochet n'a pas de limite en 0.

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{-ie^{it}}{\sqrt{t}}\right]_{2\pi}^{x^2} - \int_{2\pi}^{x^2} \frac{ie^{it}}{2t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + i\frac{e^{2i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{it}}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\boxed{H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i\frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4}\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.}$$

5) Étudions chacun des termes de l'expression précédente :

- Comme $\left|-i\dfrac{e^{ix^2}}{2x}\right| = \dfrac{1}{2x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} -i\frac{e^{ix^2}}{2x} \text{ existe et vaut} 0$$

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$

  La fonction $g : u \mapsto \dfrac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}$ est continue donc continue par morceaux sur $[2\pi, +\infty[$.

  Étude en $+\infty$: $|g(u)| = \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$.

  Or $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$).

  Donc $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ converge absolument donc converge.

  Ainsi, $lim_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ existe.

Donc, comme combinaison linéaire de limites convergentes, $lim_{x\to+\infty} H(x)$ existe [3]

$$\boxed{\text{L'intégrale généralisée } \int_{0}^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Après passage du module $|.|$, les « i » ne repoussent plus : avec $a, b \in \mathbb{R}^2$,

$$|a + ib| = \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\textit{Il n'y a plus de i}}$$

6) Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Comme $e^{-x^2(t^2-i)} = e^{-x^2t^2}e^{ix^2}$ et $e^{-x^2t^2} \geqslant 0$, il vient

$$\boxed{\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right| = \left|e^{-x^2t^2}\right|\left|e^{ix^2}\right| = e^{-x^2t^2}}$$

Et

$$\boxed{\left|t^2 - i\right| = \sqrt{t^4 + 1}}$$

3. et vaut $H(\sqrt{2\pi}) + \dfrac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \dfrac{i}{4}\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$, mais peu importe.

7) *<u>Majorations</u> : $a \leqslant b \Longrightarrow e^a \leqslant e^b$.*
Rien d'autre, rien de magique. Ne sautez pas d'étapes.
On a le cas particulier, avec souvent $a = -x$, $a = -x^2 t$, etc..., $a \leqslant 0 \Longrightarrow e^a \leqslant e^0 = 1$
Si vous vous êtes trompés une fois, repartez toujours de $a \leqslant b \Longrightarrow \dots$.

<u>Étude de l'intégrabilité de φ</u> : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$.
La fonction φ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
Étude en $+\infty$: $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).
Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Étude en $-\infty$: par parité de φ, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Ainsi, la fonction φ, positive, est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Appliquons le théorème de continuité sous le signe intégrale. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad |f(x,t)| = \left| \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} \right| = \frac{\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right|}{|t^2-i|} = \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$$

Pour éviter d'avoir à faire une étude en $-\infty$, on pouvait utiliser $f(x,-t) = f(x,t)$ et donc $g(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,\mathrm{d}t$.
Mais ce n'est pas indispensable.

8) Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} |f(x,t)| = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x,t) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
  la fonction $\ell : t \mapsto 0$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ et, comme ci-dessus,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ell(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

Par parité de g ($g(-x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$),

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0}$$

9) Soit $0 < a < b$ et $D = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = 2be^{-a^2t^2}$. La fonction φ est positive et continue sur $\mathbb{R}$.

Étude en $+\infty$: par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\varphi(t) = 0$$

Donc $\varphi(t) = o(1/t^2)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par parité de φ, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

Ainsi, φ intégrable sur $\mathbb{R}$.

Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D ;
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après 7)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ définie ci-dessus est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ d'après ci-dessus et, toujours d'après ci-dessus

$$\forall (x,t) \in D\times\mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|\left|e^{-x^2(t^2-i)}\right| = 2xe^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t.$$

Ce résultat est vrai pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc est vrai sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par parité, il reste vrai aussi sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi,

$$\boxed{g \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t.}$$

10) Soit $x > 0$.

$$g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2t^2}e^{ix^2}\,\mathrm{d}t = -2e^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}x\,\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $u = xt$, $\mathscr{C}^1$ strictement croissant ($x > 0$) et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de changement de variable nous dit que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}x\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, convergentes d'après 9 et l'énoncé, et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}x\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}}$$

11) **a)** *Vous avez droit au cercle trigo. Par contre, vous n'avez pas le droit... de ne pas trouver.*

$$\boxed{|i| = 1 \quad \text{et} \quad arg(i) = \frac{\pi}{2}}$$

b) Une racine carrée de i sera, par exemple, $z = e^{i\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Vérifions : $z^2 = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$ d'après ci-dessus.

Alors $X^2 - i = X^2 - z^2 = (X-z)(X+z)$, et il existe $A, B \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{A}{X-z} + \frac{B}{X+z}$$

En multipliant par $X - z$, il vient $\dfrac{1}{X+z} = A + \dfrac{B(X-z)}{X+z}$. Puis on fait tendre $X \to z$:

$$\frac{1}{2z} = A + 0$$

Or $z = e^{i\pi/4}$, donc $\dfrac{1}{2z} = \dfrac{1}{2}e^{-i\pi/4}$, donc

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

De même, en multipliant par $X + z$ puis en faisant tendre $X \to -z$, il vient

$$B = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{X^2 - i} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)\left(\frac{1}{X-z} - \frac{1}{X+z}\right)}$$

Dans les cas relativement simples, $\dfrac{1}{x(x-1)}$ ou plus généralement $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$, l'analyse synthèse – ou tâtonnement – fonctionne très bien :

$$\frac{1}{X+z} + \frac{1}{X-z} = \frac{2X + ..}{...} \qquad \textit{Pas bon}$$

$$\frac{1}{X+z} - \frac{1}{X-z} = \frac{X - z - X + z}{X^2 - z^2} \qquad \textit{C'est fini !}$$

c)
- <u>Valeur de</u> $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,\mathrm{d}t$:

  Nature : $\Delta = 2 - 4 = -2 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas, et l'intégrale converge en $+\infty$ et $-\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$). *Pour une intégrale généralisée, toujours commencer par étudier la nature. Ici, on vous demande la valeur de l'intégrale : on peut étudier la nature très rapidement, surtout que l'on a déjà montré que l'on savait faire ce genre d'étude dans les questions qui précèdent.*

  Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} &= \frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1} \\
&= \frac{2}{2\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{2}{\left(\sqrt{2}t - 1\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}t-1\right)^2+1}\,\mathrm{d}t && \textit{On reconnaît } \frac{u'}{1+u^2}\textit{, but du } \sqrt{2} \textit{ au numérateur} \\
&= \sqrt{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}t-1\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} && \text{Or } \lim_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \frac{\pi}{2} \\
&= \pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

- <u>Valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t$</u> :
  Le changement de variable $u = -t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement décroissant et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc le théorème nous donne la nature équivalente (donc convergente d'après ci-dessus) des intégrales, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{(-u)^2-\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,\mathrm{d}u$$

  Ainsi,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{2}}$$

- <u>Calcul de $g(0)$</u> : *C'est calculatoire : soyez méthodique et rigoureux dans votre présentation, pour pouvoir vous relire, ne serait-ce que d'une ligne à la suivante. Et en présentant méthodiquement, on voit apparaître les symétries des formules.*
  On remarque que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t$ divergent. On calcule, à part du reste de la formule, ces intégrales. La différence des deux fractions rationnelles est équivalente à $\dfrac{C}{t^2}$ (ou bien elle est égale à $g(0)$ moins les autres intégrales, qui, elles, convergent).
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t &= \left[\ln\left|t^2-t\sqrt{2}+1\right| - \ln\left|t^2+t\sqrt{2}+1\right|\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \left[\ln\left|\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right|\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
\text{Or } \frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1} \sim_{\pm\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1 \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 1 & \\
&= \ln(1) - \ln(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

  La fonction $t \mapsto \dfrac{2t-\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \dfrac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}$ est impaire, donc on pouvait s'épargner le calcul et conclure immédiatement que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle par symétrie.

$$\begin{aligned}
g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1-i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2}+1} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t\right. \\
&\qquad \left. + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1-i}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0 + i\times 2\times \pi\sqrt{2}\right) \\
&= \boxed{\frac{i+1}{\sqrt{2}}\pi}
\end{aligned}$$

12) *Vous pouvez garder un peu de temps à la fin pour chercher les éventuelles questions faciles qui se trouveraient en fin de sujet. Normalement, la difficulté du sujet est progressive, mais parfois on ne peut pas, mathématiquement, éviter de laisser des questions faciles assez loin dans le sujet. Typiquement, cette question est partiellement facile : il suffit d'intégrer la dérivée trouvée à la question 10 — et d'admettre la valeur de $g(0)$.*

D'après la question 10, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$. Donc, en intégrant entre $\varepsilon > 0$ et $x > 0$, il vient, par définition de H

$$g(x) = g(\varepsilon) - 2\sqrt{\pi}(H(x) - H(\varepsilon))$$

La formule n'est vraie que pour $x > 0$, il faut donc prendre ses précautions.

Or, d'après la question 7, g est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0, et d'après la question 1 H est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0 : en prenant la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, il vient

$$g(x) = g(0) - 2\sqrt{\pi}H(x)$$

D'après 11c, on a donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\times H(x)}$$

- <u>Valeur de $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$</u> : Cette intégrale converge d'après la question 5.

  Par définition de H, $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$. De plus, d'après la question 8, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Donc, en prenant la limite lorsque $x \to +\infty$ dans la formule ci-dessus, il vient

  $$0 = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

  Ainsi,

  $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

- <u>Valeur des intégrales de Fresnel</u> : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, donc nous venons d'écrire

  $$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) + i\sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

  Par linéarité et continuité des fonctions $z \mapsto \Re(z)$ et $z \mapsto \Im(z)$, les intégrales convergent et valent

  $$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Partie III - Etude d'une série de fonctions

13) **a)** *Cette égalité s'appelle une transformation d'Abel, c'est une sorte d'intégration par parties pour les suites : posons* $I : (u_n) \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)$, $D : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ *et* $s : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$, *linéaires. On remarque que* $D \circ I = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, $I \circ D((u_n)) = (u_n - u_0)$ *comme pour la dérivation et l'intégration. En notant* $\widetilde{u} = s(u)$, *on a*

$$D(uv) = D(u)\widetilde{v} + uD(v)$$

Ce qui nous permet de retrouver une formule d'intégration par parties pour les séries, en composant par I à gauche.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n (b_n - b_{n-1}) &= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n b_{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} b_n && \textit{Savoir décaler les indices !} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \left[a_1 b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_{n+1} b_n - a_{N+1} b_N\right] && \textit{Les pointillés sont vos amis} \\
&= \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0}$$

b) *Certains ont pensé au CSA : il y a un lien, mais dans l'autre sens. Le CSA est une conséquence, un cas particulier, de cette question. On prend* $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$, *qui est bornée.*

- <u>Étude de $\sum (a_n - a_{n+1})$</u> :
  (a_n) est décroissante donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n - a_{n+1} \geqslant 0}$
  De plus, $\sum (a_n - a_{n+1})$ est une série télescopique :

$$\forall N \geqslant 1, \qquad \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$$

  Donc l'existence de $\lim_{N \to +\infty} a_{N+1}$ entraîne la convergence de la série :

$$\boxed{\text{La série } \sum (a_n - a_{n+1}) \text{ converge}}$$

- <u>Convergence de $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$</u> :
  Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la transformation d'Abel obtenue en 13a,

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

  Montrons que chacun des termes du membre de droite a une limite quand $N \to +\infty$.

- Soit $u_n = (a_n - a_{n+1})\, b_n$. Comme $(a_n - a_{n+1})$ est positive et (b_n) bornée (par exemple, $|b_n| \leqslant M$ avec $M \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned} |u_n| &= |a_n - a_{n+1}| \times |b_n| \\ &\leqslant (a_n - a_{n+1})M \end{aligned}$$

  Or $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge d'après ci-dessus.
  Donc, d'après le théorème de majoration, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
  Ainsi, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1})\, b_n$ existe et est finie.
- Par hypothèse, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} a_{N+1} = 0$ et $|a_{N+1} b_N| \leqslant M|a_{N+1}|$.
  Donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} a_{N+1} b_N$ existe.
  Attention : $|\sin n| \leqslant 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais, comme vous le savez, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sin n$ n'existe.
- $-a_1 b_0$ est une constante.

Conclusion, la limite des sommes partielles existe comme somme de limites finies, ainsi

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n\,(b_n - b_{n-1}) \text{ converge}}$$

Dans ce genre de question aux multiples hypothèses, tout sert. Vous pouvez donc vérifier que vous avez utilisé toutes les hypothèses. Sinon, vous avez sans doute oublié un argument à un endroit. Par exemple, pour la convergence de $\sum u_n$, il faut mettre des valeurs absolues (pour le théorème de majoration) mais les enlever autour de $a_n - a_{n+1}$ (pour la convergence de $\sum (a_n - a_{n+1})$).

14) *Tactique : encore une question abordable, garder un peu de temps pour la faire. Par contre, attention aux bornes de la somme : si vous ne trouvez pas le bon résultat, ne tordez pas les formules (2 erreurs = 2 fois plus de points perdus). Passez par des pointillés, vous auriez sans doute remarqué que la somme commençait à $k = 1$.*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)x} && \textit{Une somme fréquentable commence à } k=0 \\ &= e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k && \text{Or } q = e^{ix} \neq 1 \text{ car } x \in]0, 2\pi[\\ &= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} && \text{Somme géométrique avec } q \neq 1 \\ &= \frac{e^{ix} e^{i\frac{nx}{2}} \left(e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} \\ &= \frac{e^{i\left(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)x} \Big(-2i \sin \frac{nx}{2}\Big)}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

15) *Il faut être méthodique. On vous dit tout : appliquer à $\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ la question 13b (celle des deux qui parle de convergence), i.e. $\sum a_n\,(b_n - b_{n-1})$ converge. La question est : qui est (a_n) et qui est $(b_n - b_{n-1})$?*
On veut que (a_n) soit positive, décroissante et de limite nulle : il n'y a plus beaucoup de choix naturel.

Soit $x \in]0, 2\pi[$. Posons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$$

D'après 14, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ donc

$$|b_n| = \left| \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

Donc (b_n) est bornée.
De plus, (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle, donc, d'après 13b, $\sum a_n(b_n - b_{n-1})$ converge.
Or, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n(b_n - b_{n-1}) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{ikx} \right) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.
Ainsi, nous venons de montrer la convergence de $\sum \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$:

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur }]0, 2\pi[}$$

16) *Tactique : encore une question abordable, surtout la (non) convergence absolue.*

- Non convergence absolue : Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\left| \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or, d'après Riemann, $\displaystyle\int_1^{+infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$ diverge ($\alpha = 1/2 \leqslant 1$). Donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \text{ ne converge pas absolument}}$$

- *C'est une question typique d'un problème de concours — par opposition aux petits exercices : il faut savoir relire les questions précédentes.* D'après la question 3,

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

Et d'après 5, $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x)$ existe. D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$ converge.
Effectuons le changement de variable $u = xt$, $\mathscr{C}^1$, strictement croissant ($x > 0$) et bijectif de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Le théorème de changement de variable nous dit que les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{xt}} x \, \mathrm{d}t$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

De plus,

$$\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t-H(\sqrt{x})$$

17) Soit $x\in]0,2\pi[$. Posons, pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$u_k=\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$|u_k|\leqslant\frac{1}{4k^{3/2}}$$

La série de Riemann $\sum\frac{1}{k^{3/2}}$ converge ($\alpha=3/2>1$), donc, par théorème de majoration, $\sum u_k$ converge absolument donc converge. De plus, en sommant la majoration,

$$\forall n\geqslant 1\qquad\left|\sum_{k=1}^n u_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|u_k|\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{3/2}}\leqslant\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{3/2}}=C$$

La constante C ne dépend pas de x, donc elle est valable pour tout $x\in]0,2\pi[$. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^n\frac{e^{i(k+1)x}-e^{ikx}}{ix\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{ix}\left(\sum_{k=1}^n\frac{e^{i(k+1)x}}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^n\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}}\right)-\int_1^{n+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{ix}\left(e^{ix}\sum_{k=1}^n\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}}-\sum_{k=1}^n\frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}}\right)-\int_1^{n+1}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme l'intégrale converge d'après la question 16, et les séries convergent vers $S(x)$ d'après la question 15, on passe à la limite lorsque $n\to+\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=\frac{1}{ix}\Big(e^{ix}S(x)-S(x)\Big)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, la majoration obtenue ci-dessus, lorsque $n\to+\infty$ s'écrit

$$\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C$$

Comme C est indépendant de x, il vient

$$\boxed{\exists C>0,\ \forall x\in]0,2\pi[,\qquad\left|\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x)-\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C}$$

18) D'après le changement de variable effectué à la question 16,

$$\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t-H(\sqrt{x})$$

Or H est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x\mapsto H(\sqrt{x})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme $H(0)=0$, $\lim_{x\to 0}H(\sqrt{x})=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_1^{+\infty}\frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

D'après la question 12,

$$\int_0^{+\infty}e^{it^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} I(x) \text{ existe et vaut } \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

19) *Tactique : une limite, vous savez faire ! $\sim$, o ou $\leqslant$.*
Comme $e^{ix} = 1 + ix + o(ix)$ en $x = 0$, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ix}-1}{ix} = 1}$$

D'après la question 18, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc

$$\sqrt{x}\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1)$$

La majoration de la question 17 s'écrit

$$\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = O(1)$$

D'où, toujours lorsque $x \to 0^+$,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ix}-1}{ix}S(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t + O(1) \\
&= \left(\frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1)\right)\frac{1}{\sqrt{x}} + O(1) \\
&= \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) && \text{Car } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ non bornée au voisinage de } 0^+ \\
&\sim \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{e^{ix}-1}{ix} \sim 1$ d'après ci-dessus,

$$\boxed{S(x) \sim \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE