Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – d'après Centrale PC 2018, E3A PC 2017)

C'est un sujet extrêmement classique, et donc une fonction à connaître.

1) Domaine de définition et continuité de ζ.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (Séries de Riemann). Donc

$$\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[}$$

On vient donc de montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur D_ζ.

b) Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 1$, $f_n(x) = e^{-x \ln n}$, d'où le tableau de variations :

x	1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$	$-$	
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$.

Conclusion : Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après Riemann, $\alpha = 1$), $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge et

$$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas normalement } D_\zeta}$$

c) *Sur votre copie, vous ne faites pas un second tableau de variations : vous rajoutez a et $f_n(a)$ dans le tableau précédent.*

Calcul de $\|f_n\|_\infty$: Calculons $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)|$ à l'aide du tableau de variations précédent :

x	1		a		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\Vert$		$-$		
f_n	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\frac{1}{n^a}$	$\searrow$	0

Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$.
Or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (d'après Riemann, $a > 1$).
Donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } [a, +\infty[}$$

d) D'après 1c, $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ de D_ζ avec $a > 1$, donc sur tout segment de D_ζ.
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur D_ζ.
Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est continue sur } D_\zeta}$$

2) Variations de ζ.

a) Une fonction f est dite croissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Une fonction f est dite décroissante sur I si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2, \qquad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

b) Soit $(x, y) \in D_\zeta^2$, tels que $x \leqslant y$. Comme f_n est décroissante (cf 1b) pour tout $n \geqslant 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \geqslant f_n(y)$$

En sommant et en passant à la limite, il vient,

$$\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$$

D'où

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

c) La fonction ζ est positive car $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Or elle est décroissante d'après 2b, donc

$$\boxed{\zeta \text{ admet une limite en } +\infty}$$

3) Étude aux bornes.

a) **i)** Soit $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1[$, car $x > 0$, donc

$$\forall t \in [n, n+1[, \qquad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

D'où, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

Pour $n \geqslant 2$, l'inégalité de gauche peut s'écrire

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}}$$

Ici, on fait le décalage d'indices avant *de sommer.*

ii) Soit $x \in D_\zeta$.

D'après Riemann ($x>1$), $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$ converge et, de plus, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$.

D'après Chasles,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1}$$

En intégrant à partir de $t=2$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$.

En sommant l'encadrement de la question 3(a)i entre 2 et N, il vient

$$\forall N \geqslant 2, \qquad \sum_{n=2}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$$

Toutes ces sommes convergent d'après ci-dessus, ainsi

$$\begin{array}{rcccccc} & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} \\ \Longrightarrow & \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} & \leqslant & \zeta(x)-1 & \leqslant & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in D_\zeta, \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}}$$

b) Étude au voisinage de $x=1$.

i) Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = +\infty$, par minoration (3(a)ii),

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) \text{ existe et vaut } +\infty}$$

ii) Utilisons l'encadrement de la question 3(a)ii : comme $x-1>0$,

$$\forall x \in D_\zeta, \quad x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 1} x - 1 + \frac{1}{2^{x-1}} = \lim_{x\to 1} x = 1$. Donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 1} (x-1)\zeta(x) = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}}$$

c) D'après l'encadrement de la question 3(a)ii, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1}$$

4) Fonction de Dirichlet.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (a_n) définie par $a_n = \dfrac{1}{n^x}$ est positive, décroissante et de limite nulle ($x>0$). Donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$$

b) Soit $x > 0$. D'après le critère des séries alternées, la limite $\ell = F(x)$ est encadrée entre U_{2n} et U_{2n+1}, où $U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Pour $n = 1$, il vient
$$U_2 \leqslant F(x) \leqslant U_3$$
C'est-à-dire
$$\boxed{1 - \frac{1}{2^x} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

D'après le critère des séries alternées, le reste $R_n = \sum_{k=n+1} (-1)^{k-1} a_k$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, a_{n+1} :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [a, +\infty[, \quad \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k(x)\right| = |R_n| \leqslant f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \\
\Longrightarrow \quad &\forall x \in [a, +\infty[, \quad \left|\zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(par décroissance de } f_{n+1}) \\
\Longrightarrow \quad &\|\zeta - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k\|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)^a} \qquad \text{(en passant au sup)}
\end{aligned}$$

Conclusion : Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$ $(a > 0)$, par majoration, $\lim_{n\to+\infty} \|\zeta - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k\|_\infty = 0$ et
$$\boxed{\sum (-1)^{n-1} f_n \text{ converge uniformément sur } [a, +\infty[}$$

On a convergence normale pour $a > 1$, mais pour $a \in]0, 1]$ il n'y a pas convergence normale, cf 1b et 1c.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^{n-1} f_n$ est continue (car f_n l'est) sur $[a, +\infty[$, et $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$, donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, F est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci est valable pour tout $a > 0$, donc sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$:
$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$$

C'est une autre façon de rédiger la question. On pouvait évidemment rédiger comme au 1d, et vice-versa.

e) Soit $x > 1$,

$$\begin{aligned}
\zeta(x) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} \qquad \text{Or } \begin{cases} 1 + (-1)^n = 0 \text{ si } n = 2k+1 \text{ impair} \\ 1 + (-1)^n = 2 \text{ si } n = 2k \text{ pair} \end{cases} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k)^x} \\
&= \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x} \zeta(x)}$$

f) D'après la question précédente, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} & (1-2^{1-x})\zeta(x) = F(x) \\ \Longrightarrow \quad & \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}} F(x) \\ & = (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \quad \left(\text{car } \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u) \text{ et } 2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right) \end{aligned}$$

Or, d'après 4b,

$$0 \leqslant 2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\right] \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Donc, par encadrement, $2^x \left[F(x) - \left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\right] = o(1)$, puis

$$F(x) = 1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (1 + 2^{1-x} + o\big(2^{1-x}\big))F(x) \\ &= \left(1 + \frac{2}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)\right) \qquad \left(\text{car } 2^{1-x} = \frac{1}{2^{x-1}} = 2 \times \frac{1}{2^x}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^x} - \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right) \end{aligned}$$

Conclusion : au voisinage de $+\infty$,

$$\boxed{\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)}$$

5) Dérivabilité de ζ.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in D_\zeta$, $f_n(x) = n^{-x} = e^{-(\ln n)x}$ donc f_n est $\mathscr{C}^\infty$ sur D_ζ et

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[, \quad f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-(\ln n)x} = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}}$$

b) Question de cours. Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$ et $\alpha = \dfrac{x+1}{2} > 1$.

$$\begin{aligned} n^\alpha |u_n| &= (\ln n)^k n^{\alpha - x} & \text{Or } \alpha - x = \frac{1-x}{2} < 0 \\ &= (\ln n)^k n^{\frac{1-x}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 & \text{par croissance comparée} \end{aligned}$$

Donc $n^\alpha |u_n| = o(1)$, puis $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Or $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (Riemann, $\alpha > 1$).
Donc par théorème de comparaison, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \text{ est convergente}}$$

c) *Lors d'une question « à tiroirs » de ce type, il faut bien structurer sa réponse. Ici, vous allez appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Pour ça, vous avez besoin de la convergence uniforme de la série des dérivées, qui n'a pas été montrée plus haut. Pour ça, vous allez sans doute montrer la convergence normale de* $\sum f_n'$*...*
Structurez !

- Convergence normale de $\sum f_n'$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé,

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad |f_n'(x)|=\frac{\ln n}{n^x}$$

Donc, d'après l'étude effectuée au 1c, $\|f_n'\|_\infty=\dfrac{\ln n}{n^a}$.

Or, d'après 5b avec $k=1$, $\sum\dfrac{\ln n}{n^a}$ converge, donc

$$\sum f_n' \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Soit $1<a<b$.

D'après ci-dessus, $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc normalement sur $[a,b]$, donc uniformément sur $[a,b]$.

Ainsi, $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_ζ.
  - $\sum f_n$ converge simplement vers ζ sur D_ζ d'après 1)a).
  - $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

  Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall x\in D_\zeta,\ \zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}}$$

- Variations de ζ sur D_ζ : $\forall x\in D_\zeta$, $\zeta'(x)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}<0$ donc

$$\boxed{\zeta \text{ est décroissante sur } D_\zeta}$$

d) Montrons que ζ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, par la même méthode qu'à la question précédente. Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

- Convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,+\infty[$: Soit $a>1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, d'après a),

$$\forall x\in[a,+\infty[,\quad |f_n^{(k)}(x)|=\frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

Donc, d'après 1c, $\|f_n^{(k)}\|_\infty=\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ et comme d'après 5b , $\sum\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge,

$$\sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,+\infty[$$

- Convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment de $]1,+\infty[$: Comme lors de la question c), $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment de $]1,+\infty[$, donc uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D_ζ.
  - Pour tout $i\in[\![0,k-1]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge simplement sur D_ζ d'après 5b.
  - $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de D_ζ d'après ci-dessus.

  Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme ($\mathscr{C}^k$) des séries de fonctions,

$$\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall i\in[\![0,k]\!],\ \forall x\in D_\zeta,\ \zeta^{(i)}(x)=(-1)^i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln^i n}{n^x}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } D_\zeta \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_\zeta,\ \zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^k n}{n^x}}$$

Exercice 2 (D'après CCINP PSI 2020)

Partie 1 (Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal)

1) *Le seule problème potentiel, c'est la convergence des intégrales : on fixe x et on étude la convergence de l'intégrale.*

- Fonction F : Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, \mathrm{d}t$ converge.

  La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-tx}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

  - Étude en 0 : $f(t) \sim \dfrac{t}{t} \times 1 = 1$ donc la fonction est prolongeable par continuité en 0 (par 1), et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0 donc converge.
  - Étude en $+\infty$: Comme $x > 0$, par croissance comparée,

    $$t^2|f(t)| = \left|t \sin(t) e^{-tx}\right| \leqslant t e^{-tx} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

    Donc $t^2|f(t)| = o(1)$, donc $|f(t)| = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

    Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
  - Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Ainsi,

    $$\boxed{F \text{ est définie sur }]0, +\infty[}$$

- Fonction G : Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

  La fonction $g : t \mapsto e^{-tx} \sin(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

  Étude en $+\infty$: $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)| \leqslant e^{-tx}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ converge (exponentielle, $\beta = x > 0$).

  Donc, par théorème de majoration, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

  $$\boxed{G \text{ est définie sur }]0, +\infty[}$$

- Fonction H : Soit $x \in]0, +\infty[$. De même, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-tx} \cos(t)| \leqslant e^{-tx}$. Donc, par théorème de majoration, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t)\, \mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

  $$\boxed{H \text{ est définie sur }]0, +\infty[}$$

2) **a)** *Le plus simple est d'appliquer l'inégalité des accroissements finis entre 0 et t. Mais par la méthode générale « comparer à 0 et dériver », on trouve aussi le résultat. Pour pouvoir dériver, il faut commencer par se défaire des valeurs absolues, donc se placer sur un intervalle où le sinus est positif.*

Pour tout $t \geqslant 1$, $|\sin(t)| \leqslant 1 \leqslant t$.
Pour tout $t \in [0, 1] \subset [0, \pi]$, $\sin(t) \geqslant 0$ donc l'inégalité à prouver s'écrit $\sin(t) \leqslant t$.
Posons, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = \sin(t) - t$. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ et $f'(t) = \cos(t) - 1 \leqslant 0$.
Donc f est décroissante. Comme $f(0) = 0$, $f \leqslant 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |\sin(t)| \leqslant t}$$

b) *Méthode : question b), essayons d'utiliser a).* Soit $x > 0$. D'après a), $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|\sin(t)| \leqslant |t|$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leqslant e^{-xt}$$

En intégrant, il vient

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \mathrm{d}t && \text{Par inégalité de la moyenne} \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} && \textit{Vous avez bien sur vérifié que } x \neq 0 \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

3) *Une fonction définie par une intégrale, et il faut montrer qu'elle est $\mathscr{C}^1$: c'est le théorème de Leibniz (ou théorème de dérivation sous le signe somme). Il reste à l'appliquer méthodiquement, en structurant bien sa réponse.*
Soit $a > 0$. Montrons que F est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Posons $D = [a, +\infty[$, $I =]0, +\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[, \qquad h(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$$

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D car exp l'est ;
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-xt}\sin(t)$ est continue donc continue par morceaux sur I.
- Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = e^{-at}$. La fonction φ est **intégrable sur** I car $a > 0$ et,

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|e^{-xt}\sin(t)\right| \leqslant e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz, F est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $F' = -G$.
Ceci étant vrai pour tout $a > 0$,

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[\text{ et } F' = -G.}$$

4) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} H(x) + iG(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos(t) + i\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(-x+i)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{t(-x+i)}}{-x+i}\right]_0^{+\infty} && -x+i \neq 0 \\ &= \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{t(-x+i)}}{-x+i}\right) + \frac{1}{x-i} \end{aligned}$$

Or $\left|\dfrac{e^{t(-x+i)}}{-x+i}\right| = \dfrac{1}{|-x+i|}\left|e^{-tx}e^{it}\right| = \dfrac{1}{|-x+i|} e^{-tx}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t(-x+i)}}{-x+i} = 0$. Ainsi,

$$H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{1+x^2} + i\frac{1}{1+x^2}$$

Vous devez savoir déterminer la partie réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{a+ib}$: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad H(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Posons $u = \varphi(t) = \alpha t$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Donc, d'après le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u\frac{x}{\alpha}}\cos(u)\,\mathrm{d}u = H(x/\alpha)$ sont de même nature. Or $H(x/\alpha)$ est une intégrale convergente d'après 1. Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{x}{\alpha^2+x^2}}$$

5) D'après 3), $F' = -G$. D'après 4), $G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \operatorname{Arctan}(x) \quad \text{et} \quad F(1) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}$$

Partie 2 (Autour de la formule de Viète)

1) a) $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$

Si vous avez eu un blanc au DS précédent, je suppose que ce n'était plus le cas à celui-ci.

b) Appliquons de nouveau la formule précédente : pour tout $t > 0$,

$$\boxed{\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) = 2\left[2\sin\left(\frac{t}{4}\right)\cos\left(\frac{t}{4}\right)\right]\cos\left(\frac{t}{2}\right) 2^2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{4}\right)\sin\left(\frac{t}{4}\right)}$$

c) Soit $t > 0$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \sin(t) = 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Le produit est vide et le membre de gauche vaut donc $\sin(t)$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= 2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) && (\mathcal{H}_n)\\
&= 2^n \times 2\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\\
&= 2^{n+1}\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 0$, $\mathcal{H}_n$ est vraie. Ainsi,

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}}$$

2) Soit $t > 0$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $\dfrac{1}{2^0} \cos\left(\dfrac{2-1}{2} t\right) = \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \left[\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)\right] \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) && (\mathcal{H}_n)\\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t + \frac{t}{2^{n+1}}\right) + \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t - \frac{t}{2^{n+1}}\right)\right] && \text{(indication)}\\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left[\cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2i-1}{2^{n+1}} t\right)
\end{aligned}$$

Car i parcourt les termes pairs $(2k)$ et impairs $(2k-1)$ entre $i = 1$ $(k = 1,\ i = 2k-1)$ et $i = 2^n$ $(k = 2^{n-1},\ i = 2k)$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}_n$ est vraie. Ainsi,

$$\boxed{\forall t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)}$$

3) Soit $t > 0$. Comme $\sin(x) \sim x$ lorsque $x \to 0$, il vient, lorsque $n \to +\infty$,

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \sim \frac{t}{2^n}$$

Par conséquent $2^n \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \sim t$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{\sin(t)}{t}$$

D'après 1)c) et 2)

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

En remplaçant,

$$\boxed{\forall t > 0, \quad \frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)}$$

4) *On remplace, et on constate qu'il faut montrer*

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}\, \mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}\, \mathrm{d}t$$

Donc une interversion de limite avec une intégrale généralisée : il n'y a que le théorème de convergence dominée qui puisse nous donner le résultat. On cherche donc au brouillon *une majoration* $|f_n| \leqslant \varphi$ *avec* φ *intégrable.*

Comme $|\cos| \leqslant 1$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{aligned} |f_n(t)| &\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left|\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\right| e^{-tx} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}} 1\right] e^{-tx} \\ &\leqslant e^{-tx} \end{aligned}$$

Posons $\varphi(t) = e^{-xt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (critère des exponentielles, $\beta = x > 0$).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, car somme finie de fonctions continues.
- La suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après 3).
- La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après le début de la question,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, par définition de F, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Conclusion :

$$\boxed{F(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}\,\mathrm{d}t}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4 de la partie 1,

$$\forall \alpha > 0, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\alpha^2 + x^2}$$

Pour tout $k \in [\![1, 2^{n-1}]\!]$, $\dfrac{2k-1}{2^n} > 0$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}\,\mathrm{d}t &= \frac{x}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2 + x^2} \\ &= \frac{2^{2n}x}{(2k-1)^2 + 2^{2n}x^2} \end{aligned}$$

et, en reprenant le résultat de la question 4),

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{x}{(2k-1)^2 + 2^{2n}x^2}$$

Posons $x = 1$. D'après la question 5 de la partie 1, $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Conclusion :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.}$$

6) *On cherche au brouillon à faire apparaître une formule du type* $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(k/N)$*, puis on rédige en posant clairement* f *dès le début.*

Posons $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} &= 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^{2n}\left[\left(\frac{2k}{2^n}\right)^2+1\right]}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{1+\left(\frac{2k}{2^n}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)
\end{aligned}$$

Or la fonction f est continue sur $[0,1]$, donc la somme de Riemann $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N} f\Big(\frac{k}{N}\Big)$ converge vers l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ *(C'est l'origine mathématique de la méthode des rectangles en informatique)* :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} f\Big(\frac{k}{N}\Big)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{Arctan}\ x]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

Ainsi, en prenant la suite extraite $N=2^{n-1}$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=\frac{\pi}{4}}$$

7) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,2^{n-1}]\!]$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right| &= \frac{|(2k-1)^2+2^{2n}-(4k^2+2^{2n})|}{(4k^2+2^{2n})((2k-1)^2+2^{2n})}\\
&= \frac{|(2k-1)^2-(2k)^2|}{(2k-1)^2+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}\\
&= \frac{|(2k-1-2k)(2k-1+2k)|}{(2k-1)^2+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}\\
&= \frac{|4k-1|}{(2k-1)^2+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}
\end{aligned}$$

Ne pas perdre de vue le but

Or $(2k-1)^2\geqslant 1>0$ donc $0<\dfrac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\leqslant\dfrac{1}{1+2^{2n}}$.

Et $|4k-1|\leqslant 4k+1\leqslant 4\times 2^{n-1}+1$. Donc

$$\frac{|4k-1|}{(2k-1)^2+2^{2n}}\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k\in[\![0,2^{n-1}]\!],\quad \left|\frac{1}{4k^2+2^{2n}}-\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}}\right|\leqslant\frac{4\times 2^{n-1}+1}{1+2^{2n}}\times\frac{1}{4k^2+2^{2n}}}$$

8) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$. Majorons :

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \\ &\leqslant 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} && \text{D'après 7} \end{aligned}$$

Or, d'après 6,

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$$

D'où

$$2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} \sim \frac{\pi}{4} \times \frac{4 \times 2^{n-1}}{2^{2n}} = \frac{\pi}{2^{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0}$$

Retrouvons le résultat de la question 5 : $2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} + u_n$ Or

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Donc $\left(2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right)$ converge comme somme de suites convergentes et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3 (d'après CCINP MP 2020)

1) *Un formulation équivalente serait : « Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. ».*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f_n(x) = \frac{1}{3^n}(1 + \sin(nx))$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3^n}(1 + |\sin(nx)|) \leqslant \frac{2}{3^n}$$

Or $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison $1/3 \in]-1, 1[$).
Donc, par théorème de majoration, $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge. Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

2) *Théorème de dérivation terme à terme : on structure sa réponse.*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = \frac{n}{3^n} \cos(nx)$$

- Convergence normale de $\sum f_n'$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{n}{3^n}$, donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n'(x)| = \|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{n}{3^n}$$

Or, par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} n^3 3^{-n} = 0$, donc $\dfrac{n}{3^n} = o(1/n^2)$. Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par théorème de comparaison, $\sum \dfrac{n}{3^n}$ converge. Puis, par théorème de majoration, $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge.
Ainsi, $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

- Théorème de dérivation terme à terme :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$;
  - $\sum f_n$ converge simplement vers φ sur $\mathbb{R}$ d'après 1) ;
  - $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ d'après ci-dessus.

  Conclusion : D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n}\cos(nx)}$$

3) La fonction $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$ est continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, donc, pour tout suite convergente $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de Im,

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

Ainsi, comme $\sum \left(\dfrac{e^{ix}}{3}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $q = \dfrac{e^{ix}}{3}$ avec $|q| < 1$),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}$. En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)}$$

4) Comme, pour $q = \dfrac{e^{ix}}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q\frac{1}{1-q}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} &= \frac{e^{ix}}{3} \times \frac{3}{3 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{ix}(3 - e^{-ix})}{(3 - e^{ix})(3 - e^{-ix})} \\
&= \frac{3e^{ix} - 1}{9 - 6\cos(x) + 1} \\
&= \frac{3\cos(x) + 3i\sin(x) - 1}{10 - 6\cos(x)}
\end{aligned}$$

En passant à la partie imaginaire, il vient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}}$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 2), $\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$. De plus, en dérivant l'expression obtenue au 4),

$$\varphi'(x) = \frac{3}{2} \times \frac{\cos(x)(5 - 3\cos(x)) - 3\sin(x)\sin(x)}{(5 - 3\cos(x))^2} = \frac{3}{2} \times \frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2} \times \frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}}$$

6)
- Convergence normale de $\sum f_n$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{3^n}$, donc

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{2}{3^n}$$

Or $\sum \frac{1}{3^n}$ converge (série géométrique de raison dans $]-1, 1[$), donc, par théorème de majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

- Théorème d'intégration terme à terme :
  - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est $\mathscr{C}^0$ sur $[0, \pi]$;
  - $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $[0, \pi]$ vers φ d'après ci-dessus.

Conclusion : D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions,

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \int_0^\pi 1 + \sin(nx)\,\mathrm{d}x$$

- Conclusion : comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi 1 + \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \pi + \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \pi + \frac{(-1)^{n-1} + 1}{n}$,

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}((-1)^{n-1} + 1)$$

Par conséquent, en simplifiant,

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}((-1)^{n-1} + 1)}$$

7) D'après la question 6),

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/3)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/3)^n}{n}\right)$$

Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a le développement en série entière $\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left(\ln(1 + 1/3) - \ln(1 - 1/3)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\ln 2}{3}\end{aligned}$$

8) *Reconnaître $u'f(u)$ ou effectuer le changement de variables $u = \cos(x)$.*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\Big[\ln\Big(10-6\cos(x)\Big)\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{6}\left(\ln(10+6)-\ln(10-6)\right) \\ &= \frac{\ln 2}{3}\end{aligned}$$

FIN DE L'ÉPREUVE

Pour beaucoup de questions, chez beaucoup d'entre vous, vous avez fait des efforts, et une réponse juste est à porté de main. Mais brusquement vous étudiez la suite au lieu de la série, vous écrivez f_n au lieu de $(f_n(x))$ et ce n'est plus le bon objet !
Prenez *le temps* de vérifier ce que vous écrivez, de chercher une question jusqu'à être sûr de la réponse.

Remarques générales

- Lorsqu'on vous demande si une fonction est définie, il faut non seulement vérifier que l'on ne divise pas par 0, qu'on ne prend pas la racine d'un nombre négatif, etc, mais aussi, dès qu'il y a une *limite*, que cette limite existe. Dès qu'une formule contient ∞, il y a un limite : $\sum_{n=0}^{\boxed{+\infty}}$, $\int^{\boxed{+\infty}}$ etc. Et plus généralement, dès que l'intégrale est généralisée.

  Cf la formulation des exercices 9 et 10 de la feuille sur les suites et séries de fonctions (pour des séries de fonctions) et 1, 2, etc... de la feuille sur les intégrales à paramètres pour les intégrales à paramètre.
-

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann – d'après Centrale PC 2018, E3A PC 2017)

Regardez le titre, la formule ... peut-être va-t-il être question de série de ... *Riemann* ?
C'est une fonction extrêmement classique, qui tombe donc fréquemment. À connaître.

1)a) Vous saviez tous faire, le seul obstacle était de bien comprendre la question. Désormais, il faut bien comprendre ce type de question.

2)a) A priori, f n'est pas dérivable.

3)a) Je vous l'avais dit : savoir obtenir un encadrement à l'aide d'une comparaison série/intégrale, c'est fondamental. Ce n'est pas pour rien que c'est en question de cours. En écrivant avec des pointillés, vous savez tous faire le ii.

3)b)-c) Un encadrement permet d'obtenir des limites. Vu dans la même question de cours. Si $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$ est faut : faites moins de questions, mais mieux faites.

4)a) Vous avez bien compris que, pour étudier la convergence simple, on fixe x. C'est très bien. Donc ensuite on étudie $f_n(\boldsymbol{x})$. Vous avez fait le plus difficile (comprendre la convergence simple), faites l'effort d'être cohérent dans la suite de la question, et vous aurez tout juste.

Il faut évidemment connaître le critère des séries alternées.

5)b) Question de cours.

Exercice 2 (D'après CCINP PSI 2020)

1.1) Premier paragraphe du cours sur les intégrales à paramètre.

1.2)a) On ne dérive pas une valeur absolue. Jamais. On distingue des cas pour se débarrasser de la valeur absolue.

1.2)b) C'est le b), les théorèmes n'ont pas l'air de s'appliquer : utiliser peut-être le a ?

Exercice 3

La fatigue se sent. Il ne faut pas hésiter à prendre de quoi grignoter (sucré) pendant une épreuve de 4h.
Donc : savoir reconnaître la série géométrique. Faire les calculs jusqu'au bout (q3 et 4), en se relisant si ça ne colle pas (début à $n = 1$).