

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (Fonction Zêta de Riemann)

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

1) Domaine de définition et continuité de ζ .

a) Montrer que $D_\zeta =]1; +\infty[$.

b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur D_ζ ?

c) Soit $a > 1$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

d) Montrer que la fonction ζ est continue sur D_ζ .

2) Variations de ζ et conséquences.

a) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f décroissante sur I , et celle de f croissante sur I .

b) Étudier le sens de variations de ζ .

c) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

3) Étude aux bornes.

a) i) Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer : $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

ii) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

b) Étude au voisinage de $x = 1$.

i) Étudiez la limite de ζ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

- ii) Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
- c) Étude au voisinage de $+\infty$: déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- 4) Fonction de Dirichlet. On pose :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$$

- a) Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- b) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 - \frac{1}{2^x} \leq F(x) \leq 1 - \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}$$

- c) Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum (-1)^{n-1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
- d) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- e) Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta(x) - F(x) = 2^{1-x} \zeta(x)$$

- 5) Dérivabilité de ζ .

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in D_\zeta, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
- b) Soit $x > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum_n \frac{(\ln n)^k}{n^x}$.
- c) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$, et retrouver les variations de ζ obtenues plus haut.
- d) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1; +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1; +\infty[$ sous forme d'une série.

Exercice 2 (Autour de la fonction sinus cardinal)

Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie 1** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie 2** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie 1** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie 1 (Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal)

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt, \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

- 1) Montrer que les fonctions F , G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.
- 2) a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, |\sin(t)| \leq t$.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
- 3) (5/2) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .
- 4) Trouver une expression sans intégrale pour G et pour H . On pourra calculer $H + iG$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.

- 5) En déduire une expression simple pour F . Montrer que $F(1) = \frac{\pi}{4}$.

Partie 2 (Autour de la formule de Viète)

- 1) a) Soit $t > 0$. Exprimer $\sin(t)$ en fonction de $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

- b) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\sin(t) = 2^2 \sin\left(\frac{t}{4}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{4}\right)$.
- c) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \sin(t).$$

- 2) Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

- 3) En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

- 4) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}.$$

- 5) En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

- 6) Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

- 7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}.$$

- 8) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question 5.

Exercice 3

Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}$$

- 1) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier l'écriture

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} \right)$$

Où Im représente la partie imaginaire.

- 4) En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
- 5) Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.
- 6) À l'aide de $\int_0^\pi \varphi(x) \, dx$, démontrer que

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6 \cos(x)} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 3^{n+1}} ((-1)^{n-1} + 1)$$

- 7) (5/2) Puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10 - 6 \cos(x)} \, dx$$

- 8) Retrouver la valeur de cette intégrale par un calcul direct.

FIN DE L'ÉPREUVE