

Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (E3A PSI 2015)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

- Étude en $t = 1$: On pose $t = 1 + h$. $(1 + h)^2 - 1 = h^2 + 2h = h(h + 2)$ donc

$$g(1 + h) = \frac{1}{(1 + h)^x \sqrt{(1 + h)^2 - 1}} = \frac{1}{(1 + h)^x \sqrt{h} \sqrt{h + 2}} \sim \frac{1}{1^x \sqrt{h} \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

Or $h \mapsto \frac{1}{\sqrt{h}}$ est intégrable en 0 (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$), donc, par équivalence, la fonction g est intégrable en 0.

- Étude au voisinage de $+\infty$:

$$g(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x + 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (Riemann, $\alpha = x + 1$). Donc, par équivalence, g est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$.

Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

De plus g est positive, donc $|g| = g : f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Conclusion :

$$I = \mathbb{R}_+^*$$

2) Existence : $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Étude au voisinage de $+\infty$: $\frac{1}{e^x + e^{-x}} \sim \frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($x \mapsto e^{-\beta x}$ avec $\beta = 1 > 0$).

Donc, par équivalence, $x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ l'est aussi.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ converge.

Calcul : Effectuons le changement de variable $u = e^x$, où $x \mapsto e^x$ est une bijection strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc le théorème de changement de variable s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{1/u}{u + 1/u} du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = [\text{Arctan } u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4}$

- 3) La fonction φ est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.

Effectuons le changement de variable $t = \varphi(u)$ (donc $dt = \text{sh}(u) du$).

D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature, or d'après

1) l'une des deux converge, donc toutes les intégrales convergent.

$$f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(u) du}{\text{ch}(u)\sqrt{\text{sh}^2(u)}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}(u)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^u + e^{-u}}$$

Car $\text{ch}^2 - 1 = \text{sh}^2$ et $\text{sh} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. En conclusion, d'après 2),

$$\boxed{f(1) = \frac{\pi}{2}}$$

- 4) Comme nous l'indique l'énoncé,

$$\left(\frac{\text{sh}}{\text{ch}}\right)' = \frac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \frac{1}{\text{ch}^2}$$

De plus, avec le même changement de variable qu'à la question précédente,

$$f(2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\text{ch}^2(u)} = \left[\frac{\text{sh}(u)}{\text{ch}(u)}\right]_0^{+\infty} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(X)}{\text{ch}(X)}$$

Or, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\text{sh}(X)}{\text{ch}(X)} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \sim \frac{e^X}{e^X} = 1$. Donc $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(X)}{\text{ch}(X)} = 1$, et

$$\boxed{f(2) = 1}$$

- 5) Soit $x \in I$.

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geq 0$$

Donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f \text{ est positive sur } I}$

- 6) Pour tout $t > 1$, $\ln(t) > 0$ donc $x \mapsto e^{-x \ln t} = \frac{1}{t^x}$ est décroissante.

(Exemple typique où on commence à chercher au brouillon, puis au propre on « renverse » la rédaction.)

Soit $(x, y) \in I^2$ tels que $x \leq y$. D'après ci-dessus

$$\forall t \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geq \frac{1}{t^y\sqrt{t^2-1}}$$

Donc par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } I}$$

- 7) Soit $a > 0$, montrons que f est dérivable sur $[a, +\infty[$. Soit $h(x, t) = \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[$.

Posons $\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$ pour $t \in]1, +\infty[$. φ est continue et positive (car $t \geq 1$ donc $\ln t \geq 0$).

Étude en $t = 1$: $t = 1 + h$ et

$$\varphi(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{(1+h)^a\sqrt{h}\sqrt{2+h}} \sim \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

Donc φ est prolongeable par continuité en $t = 1$ par $\varphi(1) = 0$. Donc φ est intégrable en 0.

Étude au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t) = \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}} \sim \frac{1}{t^{a+1}(\ln t)^{-1}}$$

On reconnaît une intégrale de Bertrand qu'il faudrait étudier (cf cours). Donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Donc φ est intégrable sur $]1, +\infty[$.

Théorème de dérivation :

- $\forall t \in]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$.
- $\forall x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ (d'après 1));
la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]1, +\infty[$.
- Soit $\varphi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction définie ci-dessus. φ est **intégrable sur** $]1, +\infty[$ d'après les préliminaires, et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]1, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} \leq \frac{\ln(t)}{t^a \sqrt{t^2 - 1}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } f'(x) = \int_1^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[= I$

Comme $\frac{\ln(t)}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} \geq 0$ sur $]1, +\infty[$, $f' \leq 0$ par croissance de l'intégrale, puis f décroissante sur I

8) Soit $x \in I$ fixé.

$v' : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}$ en est une primitive.

$u : t \mapsto \frac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ de dérivée $u' : t \mapsto -\frac{(x+1)}{t^{x+2}}$.

$u \times v : t \mapsto \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.

Comme l'intégrale de gauche ($f(x)$) converge, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$f(x) = [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -(x+1) \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^{x+2}} dt = (x+1) \int_1^{+\infty} \frac{t^2 - 1}{t^{x+2} \sqrt{t^2 - 1}} dt$$

En cassant la fraction, comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$f(x) = (x+1)(f(x) - f(x+2))$$

On en déduit que

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

9) On exprime les premiers termes de $f(2p)$ sans effectuer les calculs, puis on conjecture une formule, que l'on simplifie, et finalement au propre on se contente de la montrer par récurrence.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : f(2p) = \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$$

est vraie pour tout $p \geq 1$.

- $\mathcal{H}_1$: est vraie car $f(2) = 1$ d'après 4.
- $\mathcal{H}_p \implies \mathcal{H}_{p+1}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie.

$$\begin{aligned} f(2p+2) &= \frac{2p}{2p+1} f(2p) && \text{(question 8)} \\ &= \frac{2^2 p^2}{(2p+1)(2p)} \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!} && (\mathcal{H}_p) \\ &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.

• Conclusion : $\forall p \geq 1 \quad \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$

10) Comme, d'après la question 8,

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \varphi(x)$$

La fonction φ est périodique de période 1.

De plus $\varphi(1) = 1 \times f(1)f(2) = \frac{\pi}{2}$ d'après les questions 3 et 4. Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

11) Par définition de φ , $\varphi(x) = xf(x)f(x+1)$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 7. Donc φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

Donc par 1-périodicité de φ , $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi

$$\varphi(x) = xf(x+1)f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

Or $f(x+1) \underset{0}{\sim} f(1) = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$$

12) D'après 10, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = nf(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2}$. Donc $f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$.

Comme f est décroissante et positive, pour tout $n \geq 2$,

$$f(n)f(n+1) \leq (f(n))^{\leq} f(n-1)f(n)$$

En remplaçant, il vient

$$\frac{\pi}{2n} \leq f(n)^2 \leq \frac{\pi}{2(n-1)}$$

Puis

$$1 \leq \frac{2n}{\pi} f(n)^2 \leq \frac{n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{\pi} f(n)^2 = 1$, puis, toujours comme $f \geq 0$,

$$f(n) \underset[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13) C'est encore une fois la preuve du théorème de comparaison série/intégrale qui nous montre la voie : il faut passer d'une limite sur $\mathbb{N}$ à une limite sur $\mathbb{R}$ grâce à la décroissance de f .

Pour tout $x \geq 1$, comme f est décroissante, avec $n = \lfloor x \rfloor$,

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

Puis

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(n+1) \leq \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(x) \leq \sqrt{\frac{2x}{\pi}} f(n)$$

Or $\sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(n) \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}f(n) \sim 1$, et de même $\sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(n+1) \sim \sqrt{\frac{2(n+1)}{\pi}}f(n+1) \sim 1$.

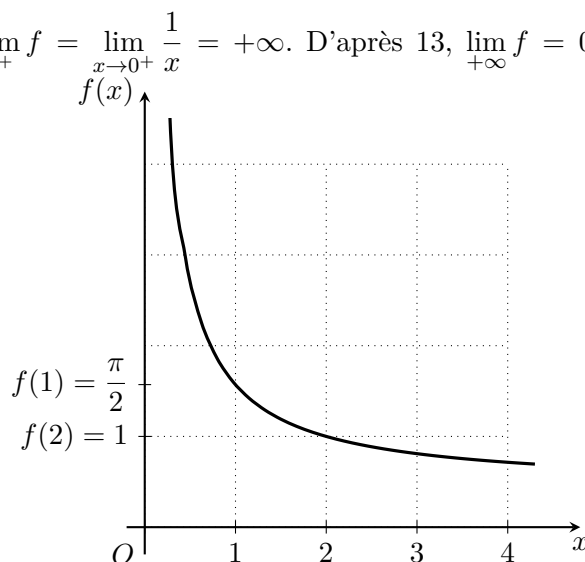
Donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(x) = 1$, et

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

- 14) Cette question peut se faire sans avoir traité les précédentes : on se contente d'admettre les résultats – à la limite en 0^+ près.

D'après 6, f est décroissante. D'après 11, $\lim_{0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. D'après 13, $\lim_{+\infty} f = 0$. D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
f	$+\infty$	0



- 15) L'équivalent de f en $+\infty$ obtenu à la question 13 nous donne celui de φ :

$$\varphi(x) = xf(x)f(x+1) \sim x\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{\pi}{2(x+1)}} \sim \frac{\pi}{2}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ (limite sur les réels). Or φ est 1-périodique, donc φ est constante :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x+n) = \frac{\pi}{2}$$

La fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 2 (CCP PC 2014)

Partie 1 (Étude d'un opérateur)

- 1) Montrons que $E \neq \emptyset$: La fonction $f = 0$ est continue et 2π -périodique donc $f \in E$: $E \neq \emptyset$.

Montrons que E est stable par combinaison linéaire :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. La fonction $\lambda f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda f + g)(x + 2\pi) &= \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) \\ &= (\lambda f + g)(x) \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + g \in E$.

Conclusion :

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- 2) a) On peut aussi faire une étude de fonction, en restreignant le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$ par 2π -périodicité de p_n , puis $[0, \pi]$ par parité et faire un tableau de variation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\forall t \in \mathbb{R}, |p_n(t)| \leq r^n$$

Donc en passant à la borne supérieure, $\|p_n\|_\infty$,

$$\|p_n\|_\infty \leq r^n$$

Or $\sum r^n$ converge car $0 \leq r < 1$ (série géométrique).

Donc, par majoration, $\sum \|p_n\|_\infty$ converge. En conclusion,

La série $\sum p_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

- b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\cos u = \Re(e^{iu})$, calculons : soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N r^n e^{int} = r e^{it} \frac{1 - r^N e^{iNt}}{1 - r e^{it}}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} r^N e^{iNt} = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int} &= \frac{r e^{it}}{1 - r e^{it}} \\ &= \frac{r e^{it}(1 - r e^{-it})}{(1 - r e^{it})(1 - r e^{-it})} \\ &= \frac{r e^{it} - r^2}{1 - r e^{it} - r e^{-it} + r^2} \\ &= \frac{r e^{it} - r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(t) &= 1 + 2\Re \left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int} \right) \\ &= 1 + \frac{2r \cos(t) - 2r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \\ &= \frac{1 - 2r \cos(t) + r^2 + 2r \cos(t) - 2r^2}{1 - 2r \cos(t) + r^2} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$P(t) = \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r \cos(t) + 1}$$

- 3) Montrons que u est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)(\lambda f + g)(t) dt \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t)g(t) dt \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda u(f)(x) + u(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $u(\lambda f + g) = \lambda u(f) + u(g)$: u est linéaire.

Montrons que $u : E \rightarrow E$: Soit $f \in E$.

- Montrons que $u(f)$ est 2π -périodique :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x + 2\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x + 2\pi - t)f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x - t)f(t) \, dt && \text{Car } P \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= u(f)(x)\end{aligned}$$

Donc $u(f)$ est 2π -périodique.

- Montrons que $u(f)$ est continue : appliquons le théorème de continuité sous le signe somme.

Recherche d'une fonction φ :

La fonction $|P|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc bornée et atteint ses bornes : $\sup_{[0, 2\pi]} |P|$ existe. De plus, $|P|$ est 2π -périodique, donc $\{|P(t)| / t \in \mathbb{R}\} = \{|P(t)| / t \in [0, 2\pi]\}$. Donc $\sup_{\mathbb{R}} |P|$ existe et vaut $\sup_{[0, 2\pi]} |P|$.

Notons $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = |f(t)| \sup_{\mathbb{R}} |P|$. Cette fonction est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable sur ce segment.

Théorème :

- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto P(x - t)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car P l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto P(x - t)f(t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ car P et f sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ d'après ci-dessus et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \quad |P(x - t)f(t)| \leq |f(t)| \sup_{\mathbb{R}} |P| = \varphi(t)$$

(Il est fondamental que φ ne dépende pas de x . C'est le cœur du théorème.)

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

La fonction $u(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $u(f) \in E$.

Conclusion : $u : E \rightarrow E$ linéaire, donc

u est un endomorphisme de E

- 4) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f, g) \in E^2$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\lambda f + g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda f + g)(t)e^{-int} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(t) + g(t)e^{-int} \, dt \\ &= \lambda c_n(f) + c_n(g) && \text{Par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$.

φ est une application linéaire

- b) Soit $f \in E$, que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par partie :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) \\ &= \frac{1}{-2in\pi} \left(\underbrace{f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \right) \quad \text{Par } 2\pi\text{-périodicité} \end{aligned}$$

On vérifie ses primitive, on vérifie le dénominateur dès qu'il y a une barre de fraction.

Donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)| dt = \frac{M}{n}$$

Finalement, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0}$$

Exercice 9 de la feuille d'intégration, théorème de Riemann-Lebesgue.

- c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \varphi(f)_n &= c_n(f) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k+n)t} dt \right) \end{aligned}$$

Or, pour $p \in \mathbb{Z}^*$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} dt = \left[\frac{e^{ipt}}{ip} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Et pour $p = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} dt = 2\pi$.

Vous avez déjà rencontré ce calcul dans la question de cours $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - e^{it}} dt = \pi$.

Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour } n \notin \{-k, k\}, c_n(f) = 0, \text{ et } c_{-k}(f) = c_k(f) = \frac{1}{2}}$$

- 5) a) Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\cos(n(x-t)) = \cos(nx) \cos(nt) + \sin(nx) \sin(nt)}$$

- b) Vous voulez écrire $u(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x-t) f(t) dt$ sous forme de somme de série. Or $P(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t)$ s'écrit comme la somme d'une série. Donc vous avez besoin de deux choses : intervertir les limites, et vérifier que remplacer $P(x-t)$ par la somme donne bien le résultat attendu.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x-t)f(t) dt = \frac{1}{2}g_n(x)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x-t)f(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^n \cos(n(x-t))f(t) dt \\
&= \frac{r^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nx)\cos(nt) + \sin(nx)\sin(nt)]f(t) dt && \text{d'après 5a} \\
&= r^n \left[\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)f(t) dt \right) \cos(nx) + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)f(t) dt \right) \sin(nx) \right] && \text{linéarité} \\
&= \frac{1}{2}g_n(x)
\end{aligned}$$

- Montrons que $t \mapsto \sum_n p_n(x-t)f(t)$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$:

Posons $f_n(t) = p_n(x-t)f(t)$, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

Comme la fonction f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, elle est bornée (et atteint ses bornes) sur ce segment : $\|f\|_{\infty}$ existe. Ainsi,

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad |f_n(t)| = |p_n(x-t)f(t)| \leq r^n \|f\|_{\infty}$$

Donc $\|f_n\|_{\infty} \leq r^n \|f\|_{\infty}$. Or $\sum r^n$ converge (série géométrique, $0 \leq r < 1$).

Donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge :

La série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$

- Théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[-\pi, \pi]$;
- La série $\sum_n f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-\pi, \pi]$;

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\sum_n \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt$ converge et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt$$

- Conclusion :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x-t) \right) f(t) dt && \text{Par définition de } P \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(x-t)f(t) dt \\
&= g_0(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt \\
&= g_0(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) dt && \text{D'après le troisième point ci-dessus} \\
&= g_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) && \text{D'après le premier point ci-dessus}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)}$$

- c) Soit $f \in E$. Par 2π -périodicité, $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{f(x) \mid x \in [-\pi, \pi]\}$.
 Or f est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$, donc bornée (et atteint ses bornes) sur ce segment.
 Ainsi, $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est bornée :

Toute fonction appartenant à E est bornée

On a déjà fait ce raisonnement au 3.

- d) La fonction P est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^1$, et P' est continue 2π -périodique sur $\mathbb{R}$ donc bornée d'après 5c : $\|P'\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |P'|$ existe.

Posons $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \|P'\|_\infty f(t)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$. Elle est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable (l'intégrale n'est pas généralisée).

- $\forall t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = \frac{1}{2\pi} P(x - t)f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car P l'est.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (intégrale sur un segment);
 la fonction $t \mapsto \frac{1}{2\pi} P'(x - t)f(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$.
- Soit $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus, intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (segment),

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \quad |h(x, t)| = \frac{1}{2\pi} |P'(x - t)f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \|P'\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P'(x - t)f(t) dt$$

Nous venons de montrer que $\text{Im } u \subset E \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Or il existe des fonctions continues 2π -périodique qui ne sont pas $\mathcal{C}^1$ (par exemple $|\sin|$).

Donc $\text{Im } u \subsetneq E$:

u n'est pas surjectif

- e) Soit $p \in \mathbb{Z}$. D'après 5)b), pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$. Ainsi,

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) e^{-ipt} dt$$

Montrons la convergence uniforme sur $[-\pi, \pi]$ de la série $\sum f_n$, avec $f_n(t) = g_n(t)e^{-ipt}$, pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|f_n(x)| = r^n |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| |e^{-ipx}| \leq r^n (|a_n| + |b_n|)$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } |a_n| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \right| \text{ et, de même, } |b_n| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) \cos(nt)| dt & \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|f_n(x)| \leq \frac{2r^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = Mr^n$$

Puis,

$$\|f_n\|_\infty \leq Mr^n$$

Or $\sum r^n$ converge (série géométrique, $0 \leq r < 1$). Donc, par majoration, $\sum \|f_n\|_\infty$ aussi : $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-\pi, \pi]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[-\pi, \pi]$.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt$$

Calcul de la somme : Pour $n = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g_0(t) e^{-ipt} dt &= c_0(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt} dt = 0 && \text{si } p \neq 0 \\ &= 2\pi c_0(f) && \text{si } p = 0 \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt = r^n a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{-ipt} dt + r^n b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) e^{-ipt} dt$$

De plus, d'après 4c, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) e^{-ipt} dt = \pi$ si $|p| = n$, et 0 sinon.

De même, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) e^{-ipt} dt = -i\pi$ si $p = n$, $i\pi$ si $p = -n$ et 0 sinon. En remplaçant,

$$\begin{aligned} \text{Si } n \neq |p| \quad & \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt = 0 \\ \text{Si } n = p \quad & \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt = r^n a_n \pi - r^n i b_n \pi \\ & = 2\pi r^n c_n(f) && \text{Car } \cos(nt) - i \sin(nt) = e^{-int} \\ \text{Si } n = -p \quad & \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt = r^n a_n \pi + r^n i b_n \pi \\ & = 2\pi r^n c_{-n}(f) && \text{Car } \cos(nt) + i \sin(nt) = e^{int} = e^{-i(-n)t} \end{aligned}$$

Finalement, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt$ ne contient que le terme $n = |p|$, et vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(t) e^{-ipt} dt = 2\pi r^{|p|} c_p(f)$$

Conclusion :

$$\boxed{c_p(g) = r^{|p|} c_p(f)}$$

6) a) Soit $f \in E$ non nulle et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $u(f) = \lambda f$.

En appliquant φ définie à la question 4, $\varphi(u(f)) = \lambda \varphi(f)$, c'est-à-dire

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad c_p(u(f)) = \lambda c_p(f)$$

Or, d'après 5e, où nous avons noté $g = u(f)$,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad c_p(u(f)) = r^{|p|} c_p(f)$$

Ainsi, en soustrayant,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad (r^{|p|} - \lambda) c_p(f) = 0$$

Si $\lambda \notin \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors $\forall p \in \mathbb{Z}$, $c_p(f) = 0$. D'après le résultat donné par l'énoncé, $f = 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, $\lambda \in \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\} \ u(f) = \lambda f\} \subset \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons l'autre inclusion : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\lambda = r^k$, et $f_k(x) = \cos(kx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 4c, $c_{\pm k}(f_k) = \frac{1}{2}$ et $c_p(f_k) = 0$ pour tout $p \notin \{-k, k\}$.

Calculons $u(f_k)$: d'après la question 5b, $u(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{i}(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Ainsi, pour f_k , $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ pour tout $n \neq k$, et $a_k = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f_k)(x) &= g(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) && \text{Question 5b} \\ &= r^k a_k \cos(kx) && \text{Tous les autres coefficients sont nuls} \\ &= r^k f_k(x) && a_k = 1 \quad \text{et} \quad f_k(x) = \cos(kx) \end{aligned}$$

Comme $f_k \neq 0$, on a donc $\lambda = r^k \in \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\}, u(f) = \lambda f\}$.

Pour $k = 0$, $f_0 = 1$ vérifie $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $c_0(f_0) = 1$. D'où $u(f) = f$. On peut aussi calculer directement $u(f)$ en utilisant la convergence uniforme de la série définissant P (question 2a).

$$\{r^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\}, u(f) = \lambda f\}$$

Conclusion : par double inclusion,

$$\boxed{\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\}, u(f) = \lambda f\} = \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

- b) Nous allons voir d'ici peu que u injectif équivaut à 0 n'est pas valeur propre de u : simple changement de formulation.

Si u n'est pas injectif, alors il existe $f \neq 0$ tel que $u(f) = 0f$. Or $0 \notin \{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Donc c'est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u : E \rightarrow E \text{ est injectif}}$$

Partie 2 (Produit de convolution, opérateurs associés)

- 1) C'est une généralisation de la question 3 de la partie 1.

- Montrons que h est 2π -périodique :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x + 2\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + 2\pi - t)g(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t)g(t) \, dt && \text{Car } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Donc h est 2π -périodique.

- Montrons que h est continue : appliquons le théorème de continuité sous le signe somme.

Recherche d'une fonction φ :

La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, donc bornée et atteint ses bornes : $\sup_{[0, 2\pi]} |f|$

existe. De plus, $|f|$ est 2π -périodique, donc $\sup_{\mathbb{R}} |f|$ existe et vaut $\sup_{[0, 2\pi]} |f|$.

Notons $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = |g(t)| \sup_{\mathbb{R}} |f|$. Cette fonction est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ donc intégrable sur ce segment.

Théorème :

- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, la fonction $x \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ car f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction φ est intégrable sur le segment $[-\pi, \pi]$ d'après ci-dessus et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \quad |f(x-t)g(t)| \leq |g(t)| \sup_{\mathbb{R}} |f| = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

La fonction h est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

$$\boxed{h \in \mathcal{C}_{2\pi}}$$

- 2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On effectue le changement de variables $u = x - t$: $\begin{cases} t = \pi \implies u = x - \pi \\ t = -\pi \implies u = x + \pi \end{cases}$

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(u)g(x-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u) du && \text{Par périodicité de } u \mapsto f(u)g(x-u) \\ &= g * f(x) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2 \quad f * g = g * f}$$

- b) Soit $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on ait : $f * \varepsilon = f$. Alors, d'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f * \varepsilon) = c_n(f)c_n(\varepsilon) = c_n(f)$$

En prenant par exemple $f = f_k$ pour $k \in \mathbb{N}$, on prouve donc que $c_n(\varepsilon) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or d'après la question 4b de la partie 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(\varepsilon) = 0$. Ce qui est absurde.

Il ne peut pas exister $\varepsilon \in \mathcal{C}_{2\pi}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on ait : $f * \varepsilon = f$.

- 3) a) Montrons que Θ est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $(f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Theta(\lambda f + g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)(\lambda f + g)(t) dt \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x-t)g(t) dt \quad (\text{linéarité de l'intégrale}) \\ &= \lambda \Theta(f)(x) + \Theta(g)(x) \end{aligned}$$

Donc $\Theta(\lambda f + g) = \lambda \Theta(f) + \Theta(g)$: Θ est linéaire.

Montrons que $\Theta : \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathcal{C}_{2\pi}$: Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. D'après la question 1, $\Theta(f) \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Conclusion :

$$\boxed{\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{2\pi})}$$

.

b) Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
 |c_n(\psi)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{-int} dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t) e^{-int}| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(t)| dt && \text{Car } |e^{i\theta}| = 1 \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\psi\|_{\infty} dt && \text{Car } \forall t, |\psi(t)| \leq \|\psi\|_{\infty} \\
 &\leq \|\psi\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$S_{\psi} = \{c_n(\psi), n \in \mathbb{Z}\} \text{ est borné et } \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\psi)| \leq \|\psi\|_{\infty}$$

c) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 |\Theta(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x-t)| |f(t)| dt \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\psi\|_{\infty} |f(t)| dt
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\Theta(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \|\psi\|_{\infty}}$$

On intègre :

$$\begin{aligned}
 \|\Theta(f)\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Theta(f)(x)| dx \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \|\psi\|_{\infty} && \text{D'après ci-dessus}
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}_{2\pi}, \quad \|\Theta(f)\|_1 \leq \|f\|_1 \|\psi\|_{\infty}}$$

d) On procède comme à la question 6a de la partie 1 :

Montrons que $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\} \Theta(f) = \lambda f\} \subset S_{\psi}$:

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tels que $f \neq 0$ et $\Theta(f) = \lambda f$. Comme $\Theta(f) = \psi * f$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\Theta(f)) = c_n(\psi) c_n(f) = \lambda c_n(f)$$

Or $f \neq 0$ et φ injective : il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n(f) \neq 0$.

Pour ce $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda = c_n(\psi)$, donc

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\} \Theta(f) = \lambda f\} \subset S_{\psi}$$

Montrons que $S_{\psi} \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\} \Theta(f) = \lambda f\}$:

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = c_k(\psi)$. Posons $f_k(x) = e^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \Theta(f_k)(x) &= f_k * \psi(x) && \text{D'après la question 2a} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{ik(x-t)} dt \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\
 &= c_k(\psi) f_k(x)
 \end{aligned}$$

Donc, $\Theta(f_k) = c_k(\psi)f_k$ et $f_k \neq 0$. Ainsi,

$$S_\psi \subset \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists f \in E \setminus \{0\} \ \Theta(f) = \lambda f\}$$

S_ψ est exactement l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $f \neq 0$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, vérifiant $\Theta(f) = \lambda f$

On remarque que tout est plus simple sur $\mathbb{C}$. L'intégration est rapide et il n'est pas nécessaire de distinguer le cas $k = 0$.

e) Θ est injective si et seulement si $0 \notin S_\psi$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\psi) \neq 0$.

FIN DE L'ÉPREUVE