# Épreuve de Mathématiques 4

Correction

---

## Exercice 1 (E3A 2016 MP)

**1)** Soit $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ est continue donc continue par morceaux $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$ : $f \geqslant 0$ et $f(t) \sim \dfrac{1}{4x^2}\dfrac{1}{t^2}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge}}$$

Valeur : La fonction $\varphi : t \mapsto 2xt$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($x > 0$) et bijective de $[0, +\infty[$ dans lui-même.
Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après ci-dessus, le théorème de changement de variable donne la convergence du membre de droite et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2x}[\mathrm{Arctan}\, u]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4x}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4x}}$$

*On pouvait aussi directement primitiver* $\dfrac{1}{1+(2xt)^2}$ *en* $\dfrac{1}{2x}\mathrm{Arctan}\,(2xt)$

**2)** Convergence simple de $\sum f_n$ :

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 1$ pour tout $n$ et $\sum f_n(0)$ diverge grossièrement.

Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \sim \dfrac{1}{4x}\dfrac{1}{n^2}$. Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par équivalence, $\sum f_n(x)$ converge absolument donc converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^* \text{ et diverge en } x = 0}$$

Domaine de définition de $F$ : D'après ci-dessus, $F$ étant la somme de la série $\sum f_n$,

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$$

Parité de $F$ : Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $(-x)^2 = x^2$,

$$F(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2(-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} = F(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{F \text{ est paire}}$$

**3)** **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n$ est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc $\mathscr{C}^\infty$, et a fortiori $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.

$$\forall x \in [a,b] \qquad f_n'(x) = -\frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$$

Comme $0 < a \leqslant x \leqslant b$, $0 < 8n^2x \leqslant 8n^2b$ et $1+4n^2x^2 \geqslant 1+4n^2a^2 > 0$. Ainsi,

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f_n'(x)| = \frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2} \leqslant \frac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$$

Or $\dfrac{8n^2b}{1+4n^2a^2} \sim \dfrac{8b}{16a^4}\dfrac{1}{n^2}$, et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann).

Donc par équivalence $\sum \dfrac{8n^2b}{(1+4n^2a^2)^2}$ converge, puis par majoration $\sum \|f_n'\|_\infty$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n' \text{ converge normalement sur } [a,b]}$$

**b)** Théorème de dérivation terme à terme :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ d'après la question 3)a).
- $\sum f_n$ converge simplement vers $F$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}^*$ d'après la question 2).
- $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ d'après la question 3)a).

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme, $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\forall x \in [a,b] \qquad F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2}$$

Ceci est vrai pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc $F$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\displaystyle\bigcup_{0<a<b} [a,b] = \mathbb{R}_+^*$, puis par parité sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*}$$

**4)** *C'est un cas typique de comparaison série/intégrale : $u_n$ à gauche et une intégrale entre $n-1$ et $n$ à droite. Il ne reste plus qu'à trouver le « $f$ ».*

Posons $f(t) = \dfrac{1}{1+4t^2x^2}$ pour $t \geqslant 0$. La fonction $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[n-1,n]$ :

$$\begin{array}{rcccc} \forall t \in [n-1,n], \quad f(n) & \leqslant & f(t) & \leqslant & f(n-1) \\ \Longrightarrow \quad f(n) = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(n-1)\,\mathrm{d}t = f(n-1) \quad \text{(croissance de l'intégrale)} \end{array}$$

L'inégalité de gauche nous donne

$$\boxed{\frac{1}{1+4n^2x^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t}$$

En sommant entre 0 et $N \in \mathbb{N}^*$ il vient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+4n^2x^2} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^N \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme la série (question 2) et l'intégrale (question 1) convergent, on peut passer à la limite $N \to +\infty$ :

$$\boxed{F(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t}$$

**5)** Soit $x > 0$. Dans l'encadrement précédent, utilisons la partie droite : pour $n \geqslant 1$,

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{1+4(n-1)^2x^2}$$

Donc en décalant les indices et en sommant entre 0 et $N$,

$$\int_0^{N+1} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{1+4n^2x^2}$$

En isolant $n = 0$ à droite et en faisant tendre $N \to +\infty$ (de même qu'en 4, tout converge)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t - 1 \leqslant F(x)}$$

**6)** D'après 1, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4x}$. Les questions 4 et 5 nous donnent donc l'encadrement :

$$\forall x > 0 \qquad \frac{\pi}{4x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}$$

<u>Étude en $0^+$</u> : Soit $x > 0$. Comme $\dfrac{\pi}{4x} > 0$,

$$1 - \frac{4x}{\pi} \leqslant \frac{F(x)}{\frac{\pi}{4x}} \leqslant 1$$

Ainsi, en passant à la limite quand $x \to 0^+$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{4x}{\pi} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\frac{\pi}{4x}}$ existe et est égale à 1.
Conclusion :

$$\boxed{F(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\pi}{4x}}$$

<u>Étude en $+\infty$</u> : Pour tout $n \geqslant 1$, $f_n \geqslant 0$ donc en sommant $F \geqslant 0$. Ainsi l'encadrement s'écrit aussi

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4x}$$

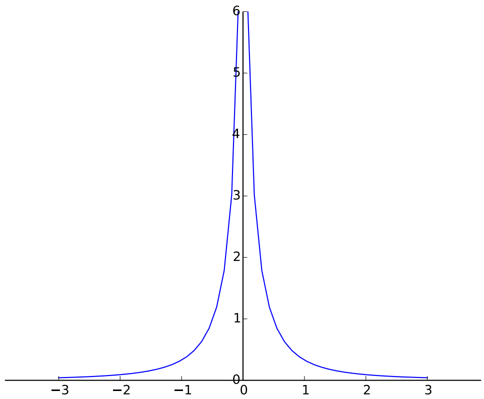
Puis en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

**7)** D'après 3)b), $\forall x > 0$, $\displaystyle F'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8n^2x}{(1+4n^2x^2)^2} < 0$. Donc $F$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On complète par parité.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | $+$ | \|\| | $-$ |
| $F$ | $0 \nearrow +\infty$ | \|\| | $+\infty \searrow 0$ |

*On pouvait aussi déterminer les variations directement : chaque $f_n$ est décroissante, donc $0 < x \leqslant y$ entraîne $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ puis on somme sur $n$.*




(a) Courbe de la fonction $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} f_n$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

ma_fig = plt.figure()


def f(x, n):
    return 1/(1+4*n**2*x**2)


def F(x, N=10):
    return sum([f(x, n) for n in
        range(1, N)])

Fv = np.vectorize(F)

x = np.linspace(xmin, xmax)
y = Fv(x)
plt.plot(x, y)
ma_fig.savefig('traceF.pdf')
```

(b) Code python

FIGURE 1 – Tracé

**8)** Soit $x > 0$ fixé.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ est définie et continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

<u>Étude en 0</u> : $f(t) \sim \dfrac{t}{2xt} = \dfrac{1}{2x}$. Donc $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(t) = \frac{1}{2x}$.

Ainsi $f$ est prolongeable par continuité en 0, et par conséquent l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{e^{2xt} - 1} \sim \frac{1}{e^{2xt}} = e^{-2xt}$$

D'après le critère des exponentielles, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2xt}\,\mathrm{d}t$ converge ($\beta = 2x > 0$), donc par équivalence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2xt} - 1}\,\mathrm{d}t$ aussi.

Ainsi, par majoration, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

<u>Conclusion</u> : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et ce pour tout $x > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

**9)** Soit $a > 0$. Montrons que $G$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Posons $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{e^{2at} - 1}$, définie et continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

La fonction $\varphi$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ : prolongeable par continuité en 0 et équivalente à $te^{-2at}$, donc $\varphi(t) = o(1/t^2)$ en $+\infty$ (à détailler sur la copie).

Théorème de continuité sous le signe somme : Soit $I = ]0, +\infty[$, $D = [a, +\infty[$ et $h(x,t) = \dfrac{\sin t}{e^{2xt} - 1}$ définie sur $D \times I$.

- $\forall t \in I$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $D$ car exp l'est.
- $\forall x \in D$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur $I$.
- La fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ définie ci-dessus par $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^{2at} - 1}$ est **intégrable sur** $I$ et

$$\forall (x,t) \in D \times I, \qquad |h(x,t)| = \frac{|\sin t|}{e^{2xt} - 1} \leqslant \frac{t}{e^{2xt} - 1} \leqslant \varphi(t)$$

  Car $|\sin t| \leqslant |t|$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $G$ est définie et continue sur $D$.

Or ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, donc

$$\boxed{G \text{ est continue sur } \bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*}$$

**10)** Convergence : La fonction $f : t \mapsto \sin(t)e^{-\alpha t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$ : pour tout $t \geqslant 0$, $|f(t)| \leqslant e^{-\alpha t}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge (critère des exponentielles, $\alpha > 0$). Donc, par majoration,

$$\boxed{I_\alpha \text{ converge absolument donc converge}}$$

Calcul : De même, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge, et, comme $-\alpha + i \neq 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-\alpha+i)t}}{-\alpha+i}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{-\alpha+i} = \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}$$

Or $I_\alpha = \Im\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t\right)$, donc

$$\boxed{I_\alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}}$$

*On peut éventuellement s'épargner l'étude de la convergence* per se *en effectuant le calcul jusqu'à $X \geqslant 0$ puis en constatant que la limite quand $X \to +\infty$ existe.*

**11)** Soient $t > 0$ et $x > 0$. Comme $q = e^{-2xt} \in ]-1, 1[$, la série géométrique s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-2xt}\right)^n = e^{-2xt} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-2xt}\right)^n = \frac{e^{-2xt}}{1 - e^{-2xt}} = \frac{1}{e^{2xt} - 1}$$

*Question de cours de début d'année, mais sans le passage avec des complexes : encore plus simple. Donc vous l'avez reconnue !*

En multipliant par $\sin t$ il vient

$$\boxed{\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-2nxt}}$$

**12)** *Au brouillon : on cherche à faire apparaître $F$ ou $G$. Ici, $G$ vous tend les bras : il suffit d'intégrer entre 0 et $+\infty$ selon $t$. Dans le membre de gauche il y a $\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\dots$ : on va forcément intervertir. Et comme on intègre jusqu'en $+\infty$, il ne reste qu'un seul théorème : la question est quasiment résolue. Au moment de la rédaction au propre, on met dans l'ordre, cf cours.*

Soit $x > 0$ fixé.

Préliminaires : Pour tout $n \geqslant 1$, posons $u_n = \int_0^{+\infty} |\sin t| e^{-2nxt}\,dt$ ($\geqslant 0$).

Par majoration et critère des exponentielles, l'intégrale $u_n$ converge.

Par croissance comparée, $\lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-2nxt} = 0$, donc $te^{-2nxt} = o(1/t^2)$. Or $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison $\int_0^{+\infty} te^{-2nxt}\,dt$ converge.

De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|\sin t| \leqslant t$. Ainsi,

$$u_n \leqslant \int_0^{+\infty} te^{-2nxt}\,dt$$

Or, comme par croissance comparée $\lim_{t\to+\infty} t\frac{e^{-2nxt}}{-2nx} = 0$, le théorème d'intégration par parties nous donne la convergence des intégrales et l'égalité

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} te^{-2nxt}\,dt &= \left[t\frac{e^{-2nxt}}{-2nx}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2nx}\int_0^{+\infty} e^{-2nxt}\,dt\\ &= 0 + \frac{1}{2nx}\left[\frac{e^{-2nxt}}{-2nx}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{4n^2x^2}\end{aligned}$$

Ainsi la majoration précédente s'écrit

$$u_n \leqslant \frac{1}{4x^2n^2}$$

Donc, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$), par majoration $\sum u_n$ converge.

Théorème d'intégration terme à terme : Soit $f_n : t \mapsto \sin(t)e^{-2nxt}$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \geqslant 0$.

- $(f_n)$ est une suite de fonctions continues donc continues par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$, d'après ci-dessus.
- $\sum f_n$ converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{\sin t}{e^{2xt-1}}$, qui est continue donc continue par morceaux, d'après la question 11.
- La série $\sum u_n$, où $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt$, converge d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (ce que l'on savait depuis la question 8) et

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^{2xt-1}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-2nxt}\,dt$$

Or d'après la question 10 avec $\alpha = 2nx$, $\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-2nxt}\,dt = \frac{1}{1+4n^2x^2}$. Par conséquent,

$$\boxed{F = G \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$$

**Exercice 2** (INP 2018 PC) **1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. *Un module se calcule au carré, puis on prend la racine.*

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \qquad |v_n(\theta)|^2 = t^{2n}(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 u)^n \leqslant t^{2n}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^n = t^{2n}$$

Par conséquent, $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$, $|v_n(\theta)| \leqslant |t|^n$, et en passant au sup pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\|v_n\|_\infty \leqslant |t|^n$$

Or, comme $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^n$ converge. Donc, par majoration, $\sum \|v_n\|_\infty$ converge.
Conclusion :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge normalement sur } [-\pi, \pi]}$$

**2)** *On vous demande de déterminer la somme d'une série, sans plus d'indication : elle donc … soit géométrique, soit télescopique.*

Soit $t \in ]-1, 1[$ et $u \in [-\pi, \pi]$ fixés. $\sum v_n$ converge normalement donc simplement sur $[-\pi, \pi]$.
Soit $q = t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)$. Comme $|q| \leqslant |t| < 1$ d'après ci-dessus, on a

$$S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}$$

De plus $u \mapsto \cos u$ est paire, donc finalement, pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\boxed{S(u) = \frac{1}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{S \text{ est paire}}$$

**3)** Théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ ;
- $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément vers $S$ sur $[-\pi, \pi]$ d'après la question 1.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum \int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)\,\mathrm{d}u && \text{Par intégration terme à terme} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in ]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t\cos\theta - \mathrm{i}t\sin\theta\cos u}}$$

**4)** Effectuons le changement de variable $v = \pi - u$ *(c'est un intégrale sur un segment, pas besoin de prendre des gants et un théorème).*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u &= \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(\pi - v)}{1 + a^2\cos^2(\pi - v)}(-1)\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\pi} \frac{-\cos v}{1 + a^2\cos^2 v}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 0}$$

**5)** Posons $u = \text{Arctan}\, v$. La fonction Arctan est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, \pi/2[$. De plus
$$\frac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u = 1 + v^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$$
Donc, d'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature – donc convergentes ici – et
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2\,\cos^2 u} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{a^2}{1+v^2}}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2+a^2}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
Finalement,
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2\,\cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}$$

**6)** Préliminaire : comme $\cos(\pi-u) = -\cos(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\mathrm{d}u$ et
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$$
Puis
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} S(u)\,\mathrm{d}u &= 2\int_0^{\pi} S(u)\,\mathrm{d}u && \text{car } S \text{ est paire d'après 2}\\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{1-t\cos\theta+it\sin\theta\cos u}{(1-t\cos\theta)^2+t^2\sin^2\theta\cos^2 u}\,\mathrm{d}u && \text{produit par la quantité conjuguée}\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u + \frac{2it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ & && \text{avec } a = \left|\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right| > 0\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\times\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2}\times 0 && \text{d'après les questions 5 et 4}\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\times\frac{\pi}{\sqrt{1+\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2\cos^2\theta+t^2\sin^2\theta}}\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{\forall t\in\,]-1,1[\,,\quad \forall\theta\in[0,\pi]\,,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{1-t\cos\theta-it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}}$$

# Exercice 3 (d'après INP 2014 MP)

## Partie 1 (Convergence de séries par transformation d'Abel)

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $B_{-1} = 0$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k + a_n B_n - a_0 B_{-1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n}$$

*C'est une intégration par partie dans les séries :*

- *$(B_k)$ joue le rôle d'une « primitive » de $(b_k)$ ;*
- *$(a_{k+1} - a_k)$ celui d'une « dérivée » de $(a_k)$ ;*
- *Le terme $a_n B_n$ est le crochet $[uv]_a^b$ ;*
- *Le terme $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ est l'intégrale $-\int_a^b uv'$.*

**2)** **a)** C'est une série télescopique : pour tout $n \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1}) \text{ converge vers } a_0}$$

**b)** Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|B_n| \leqslant M$.
Comme $(a_n)$ décroissante, $a_k - a_{k+1} \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 0$. Ainsi,

$$|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leqslant (a_k - a_{k+1}) M$$

Donc, comme $\sum (a_k - a_{k+1})$ converge d'après a), par majoration, $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ converge absolument donc converge.
De plus $|a_n B_n| \leqslant |a_n| M \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n \text{ converge}}$$

**c)** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le théorème des séries alternées nous dit que si

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$ (i.e. $(u_n)$ est alternée) ;
- $(|u_n|)$ est décroissante,
- $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

Alors la série $\sum u_n$ converge.
<u>Démonstration</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $a_n = |u_n|$. On a donc $(a_n)$ décroissante de limite nulle. Quitte à considérer $(-u_n)$, on peut supposer $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \geqslant 0$.

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1+1} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$$

Donc $(B_n)$ est bornée (par 1).
D'après 2)b), $\sum a_n b_n$ converge. C'est-à-dire $\sum u_n$ converge.

**3)** **a)** Comme $\theta$ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $e^{i\theta} \neq 1$. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}}$$

*Question de cours.*

**b)** Soit $b_n = e^{in\theta}$. D'après a),

$$\begin{aligned} |B_n| &= \left| \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| \\ &\leqslant \frac{1+\left|e^{i(n+1)\theta}\right|}{|e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})|} \\ &\leqslant \frac{2}{|2\sin(\theta/2)|} \end{aligned}$$

Donc $(B_n)$ bornée.
Si $\alpha > 0$, $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est décroissante de limite nulle, donc d'après la question a, $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.
Conclusion :

- Si $\alpha \leqslant 0$, $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est grossièrement divergente.
- Si $\alpha > 0$, $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

**4)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin(2kn\pi) = 0$ donc $u_n(2k\pi) = 0$, et la série $\sum u_n(2k\pi)$ converge.
Si $x$ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, on applique le 3b avec $\theta = x$ et $\alpha = 1/2 > 0$ :

$$\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}} \text{ est convergente}$$

Ce qui entraîne, d'après l'énoncé, que $\sum \mathcal{I}m\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}\right)$ converge. c'est-à-dire $\sum u_n(x)$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La série de fonction } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement en tout point de } \mathbb{R}.}$$

**Partie 2** (Convergence uniforme de séries)

**1)** **a)** Comme $(F_n)$ est uniformément bornée

$$\forall x \in A, \qquad |F_n(x)| \leqslant M$$

Donc $\|F_n\|_\infty$ existe et est majorée par $M$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|a_n F_n\|_\infty = |a_n| \, \|F_n\|_\infty \leqslant |a_n| M \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (a_nF_n) \text{ converge uniformément sur } A}$$

**b)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $(a_n)$ décroissante,

$$\|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty \leqslant M(a_k - a_{k+1})$$

De plus la série $\sum M(a_k - a_{k+1})$ converge : c'est une série télescopique et $(a_n)$ converge.
Donc, par majoration, $\sum \|(a_k - a_{k+1})F_k\|_\infty$ converge. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0}(a_k - a_{k+1})F_k \text{ converge normalement sur } A}$$

**c)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n f_n$.
Soit $x \in A$ fixé. D'après 1.1, en posant $b_n = f_n(x)$ et en remarquant que $B_n = F_n(x)$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})F_k(x) + a_nF_n(x)$$

D'après la question b, $\sum(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement donc uniformément sur $A$.
D'après la question a, la suite $(a_nF_n)$ converge uniformément sur $A$.
Donc $S_n$ converge uniformément sur $A$ comme somme de suite uniformément convergentes :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum a_nf_n \text{ converge uniformément sur } A}$$

**2) a)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right) = e^{i\frac{x}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{1 - e^{ix} = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}$$

**b)** Soit $a \in ]0, \pi[$. Appliquons les résultats obtenus au 1)c). Posons

- $A = [a, 2\pi - a]$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $f_n(x) = \sin(nx)$.

La suite $(a_n)$ est décroissante de limite nulle, il reste à monter que $(F_n)$ est uniformément bornée.
Soit $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \\
&= \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)
\end{aligned}$$

Or, en reprenant le calcul commencé au 1.3)a), comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)x/2}\left(e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{-ix/2} - e^{ix/2}\right)} \\
&= e^{inx/2}\frac{\sin\left((n+1)x/2\right)}{\sin\left(x/2\right)}
\end{aligned}$$

Donc $F_n(x) = \dfrac{\sin(nx/2)\sin\left((n+1)x/2\right)}{\sin\left(x/2\right)}$. Par conséquent, comme le minimum de $\sin(x/2) > 0$ sur $[a, 2\pi - a]$ est atteint en $x = a$ et $x = 2\pi - a$, et vaut $\sin(a/2) > 0$,

$$\forall x \in A |F_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin(a/2)}$$

Par conséquent $\|F_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sin(a/2)} = M$ : la suite $(F_n)$ est uniformément bornée.
En appliquant le résultat du 2.1)c) à la série de terme général $(a_n f_n) = (u_n)$,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [a, 2\pi - a]}$$

**c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est continue sur $[a, 2\pi - a]$, donc $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ aussi.
De plus $(U_n)$ converge uniformément vers $U$ sur $[a, 2\pi - a]$ d'après la question b.
Donc $U = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$ est continue sur $[a, 2\pi - a]$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } U \text{ est continue sur } \bigcup_{a\in]0,\pi[} [a, 2\pi - a] = ]0, 2\pi[}$$

## Exercice 4 (E3A 2017 PC)

**1)**

```python
def divise(p, q):
    return q % p == 0
```

**2)**

```python
import numpy as np


def estpremier(p):
    if p in [0, 1]:
        return 0
    for a in range(2, int(np.sqrt(p))+1):
        if divise(a, p):
            return 0
    return 1
```

0 et 1 ne sont pas premiers : on retourne 0 dans ces deux cas. Et on commence à 2 les tests de divisibilité.
Il n'est pas nécessaire de dépasser $\sqrt{p}$ : si $p = a \times b$, forcément $a$ ou $b$ est inférieur à $\sqrt{p}$.

**3)**

```python
def phi(p):
    res = 0
    for n in range(2, p+1):
        res += estpremier(n)
    return res


def phiBis(p):
    return sum([estpremier(n) for n in range(2, p+1)])


def crible(p):
```

```
    """crible d'Eratosthene sans divise"""
    L = list(range(2, int(np.sqrt(p))+1))
    #liste des potentiels nombres premiers dont il faut rayer les multiples
    marque = np.array([True] * (p+1))
    #k premier <=> marque[k]
    marque[:2] = False
    for k in L:
        if marque[k]:
            marque[k**2::k] = False
    return marque


def phiTer(p):
    marque = crible(p)
    return len(marque[marque == True])
```

La fonction phiBis est identique à phi, mais avec une syntaxe différente. La complexité est plutôt mauvaise : deux boucles imbriquées, en première approximation $\sum_{n=2}^{p} \sqrt{n}$.

La troisième utilise le crible d'Ératosthène, qui permet de gagner en complexité.

**4)** **a)** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels non nuls.

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

**b)** Par croissance comparée, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$. Donc, d'après l'équivalent donnée par l'énoncé,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$$

Or, si l'ensemble des nombres premiers $\mathscr{P}$ était fini, $(\varphi(n))_n$ devrait être stationnaire à Card $\mathscr{P}$ à partir d'un certain rang. Ce qui est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\text{Le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers}}$$

*Il existe une démonstration élémentaire du caractère infini de $\mathscr{P}$ : supposons $\mathscr{P}$ fini, et posons*

$$q = \left(\prod_{p\in\mathscr{P}} p\right) + 1$$

*Comme, pour tout $p \in \mathscr{P}$, $q = 1 \mod p$, $q$ n'est divisible par aucun nombre premier, donc aucun nombre autre que 1 et lui-même, donc est premier, ce qui est absurde.*

**c)**

```
def theta(n):
    return abs(phi(n)*np.log(n)/n - 1)


def test(epsilon):
    N = 50
    while (theta(N) > epsilon):
        N += 1
    return N
```

**d)**

```
import matplotlib.pyplot as plt


x = range(50, 5000)
y = [theta(N) for N in x]
plt.plot(x, y)
```