

Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + 4n^2x^2}$$

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4n^2x^2} \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} dt$$

- 1) Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 4t^2x^2} dt$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

- 2) Étudier la convergence simple de la série $\sum f_n$.

En déduire que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F .

- 3) Soient a et b des réels vérifiant $b > a > 0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que la série $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

b) Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{R}^*$?

- 4) Soit $x > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{1 + 4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{1 + 4t^2x^2} dt$$

puis établir que

$$F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 4t^2x^2} dt$$

- 5) Pour $x > 0$ démontrer de même l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + 4t^2x^2} dt - 1 \leq F(x)$$

- 6) En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- 7) Étudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.
- 8) Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 9) Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 10) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, établir la convergence l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-\alpha t} dt$$

et calculer sa valeur.

- 11) Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-2nxt}$$

- 12) En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Exercice 2

Pour $\theta \in [0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$w_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n du$$

- 1) Soit $t \in]-1, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$v_n(u) = t^n (\cos \theta + i \sin \theta \cos u)^n$$

Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi, \pi]$.

- 2) Pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, déterminer la somme $S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)$ de cette série. Quelle est la parité de S ?

- 3) Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t \cos \theta - i t \sin \theta \cos u}$.

Dans les deux questions suivantes, a désigne un réel strictement positif.

- 4) Montrer que $\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{1 + a^2 \cos^2 u} du = 0$.

On pourra utiliser le changement de variable défini par $v = \pi - u$.

- 5) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + a^2 \cos^2 u} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.

On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \text{Arctan } v$.

- 6) En déduire que :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \forall \theta \in [0, \pi], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta) t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t \cos \theta + 1}}.$$

Exercice 3 (Transformation d'Abel)

Partie 1 (Convergence de séries par transformation d'Abel)

On considère une suite de réels (a_n) , une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

- 1) Transformation d'Abel : En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

- 2) On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.
- Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
 - En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

- 3) Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$.
 - Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.
- 4) Soit la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x , $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Partie 2 (Convergence uniforme de séries)

- 1) On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On pose, pour tout $x \in A$ et pour tout entier naturel n ,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(x)| \leq M$ (on dira que la suite (F_n) est uniformément bornée)

- Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A
 - Démontrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .
 - A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A .
- 2) Exemple.
- Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
- Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$.
 - Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.
 - En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

Exercice 4

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1, 3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage Python.

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

- 1) Ecrire une fonction `divise (p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls p et q , renvoyant `True` si p divise q et `False` sinon.
- 2) Ecrire une fonction `estpremier (p)` d'argument un entier naturel p , renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
- 3) Ecrire une fonction `phi (p)` d'argument un entier naturel p , renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p .
- 4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n .

Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers :

$$\varphi(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left| \frac{\varphi(n) \ln(n)}{n} - 1 \right|$.

- a) Rappeler une caractérisation de l'équivalence de deux suites réelles (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
- b) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- c) Écrire une fonction `test (epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \varepsilon$.
- d) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $\llbracket 50; 5000 \rrbracket$.

FIN DE L'ÉPREUVE