

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 (CCINP 2023 PC)

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence par définir la fonction dilogarithme dans la première partie, puis on étudie quelques-unes de ses propriétés dans les parties suivantes.
On admet et on pourra utiliser librement l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie I - Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]-\infty, 1]\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in]-\infty,1]\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

1) Justifier que la fonction f est bien définie sur $]-\infty,1]\times]0,+\infty[$: $f(x,t)$ existe pour tout $x \in]-\infty,1]$ et $t \in]0,+\infty[$.

2) Montrer que la fonction $t \mapsto f(1,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(1,t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

3) Soit $x \leqslant 1$. Montrer que, pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$0 \leqslant f(x,t) \leqslant f(1,t)$$

En déduire que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après les résultats précédents, on peut définir la fonction $L :]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty,1], \quad L(x) = x \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$$

Cette dernière est appelée fonction dilogarithme.

4) Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$.

Partie II - Développement en série de fonctions

Dans cette partie, on montre que la fonction L peut s'écrire comme la somme d'une série de fonctions particulières.
On considère un nombre réel $x \in [-1,1]$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t}x^n.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

6) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(x,t)$$

7) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que

$$L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

8) Selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, calculer $1+(-1)^n$. En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L\left(x^2\right)$$

9) Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

Exercice 2 (Centrale 2023 PSI)

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

2) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

3) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

4) Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5) à l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

6) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

7) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.

9) Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

10) Soit n un entier naturel non nul. À l'aide du changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, montrer que

$$I_n = \sqrt{n}\mathrm{e}^{-n} \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(n + y\sqrt{n}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\mathrm{d}y.$$

11) Soit n un entier naturel non nul. Déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}\mathrm{d}y.$$

On note g la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = g(y)\left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -\sqrt{n} \\ \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} & \text{si } y \geqslant -\sqrt{n} \end{cases}$$

12) **a)** Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$f_n(y) = \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$$

b) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y)$, que l'on notera $f(y)$.

13) Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} q(x)$. En déduire que q est prolongeable en une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q.

b) Calculer la dérivée de $u \mapsto \ln(1 + ux)$ sur $[0, 1]$, pour $x > -1$. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1 + ux}\mathrm{d}u$.

c) En déduire que q est une fonction décroissante sur $]-1, +\infty[$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+$. À l'aide de q, montrer que $n\left(\dfrac{y}{\sqrt{n}} - \ln\left(1+\dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)\right) \geqslant y - \ln(1+y)$.
En déduire que $f_n(y) \leqslant (1+y)\mathrm{e}^{-y}$.

e) Montrer que, pour tout $u \in]-1,0]$, $h(u) = \ln(1+u) - u + u^2/2 \leqslant 0$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^{-*}$. Montrer que $f_n(y) \leqslant \mathrm{e}^{-y^2/2}$

14) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}$$

15) Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

16) Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

17) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)b_n.$$

18) En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2 Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

19) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^2}$.

20) En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

II.C.3

21) Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

22) En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

FIN DE L'ÉPREUVE