Lycée St Joseph
Classe de PC

Lundi 7 novembre 2022

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (d'après ESSEC 2016)

Partie 1 (Étude de la fonction φ)

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

1) Comme $x \in \mathscr{D}$, $x \notin \mathbb{Z}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 - x^2 \neq 0$: $u_n(x)$ existe [1].

Lorsque $n \to +\infty$, $|u_n(x)| \sim \dfrac{2x}{n^2}$ (pour [2] $x \neq 0$).

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Si $x = 0$, la série est de terme général nul, donc converge.

Conclusion : $\boxed{\text{La série de terme général } u_n(x) \text{ est convergente.}}$

On vient d'étudier la convergence simple de $\sum u_n$.

2) Imparité et periodicité de φ.

a) Soit $x \in \mathscr{D}$. Comme $x \notin \mathbb{Z}$, $-x \notin \mathbb{Z}$ non plus (par l'absurde : $\mathbb{Z}$ est stable par passage à l'opposé).

$$\varphi(-x) = \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{n^2 - (-x)^2} = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2 - x^2} = -\varphi(x)$$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est impaire}}$

b) *C'est une décomposition en éléments simples, mais comme on nous la donne, autant utiliser le résultat.*

$$\forall x \in \mathscr{D} \qquad \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n + x - (n-x)}{(n-x)(n+x)} = \frac{2x}{n^2 - x^2} = u_n(x)$$

c) Pour $x \in \mathscr{D}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente,

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x}$$

d) *Le point délicat : la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n+x}$, tout comme la série $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n-x}$, diverge. Donc on ne peut pas couper en deux sommes infinies, et faire deux changements d'indices. Pour ne prendre aucun risque, il faut revenir à des sommes finies, et passer à la limite à la fin.*

Plus généralement, il est souvent sage, lorsqu'on manipule des sommes infinies, de commencer par manipuler la somme jusqu'à N, puis prendre la limite : dissocier les deux opérations, somme et limite. Question 1.2.d, 2.5.a.

Comme $x + 1 \in \mathbb{Z}$ entraîne $x \in \mathbb{Z}$, par contraposition, $x \in \mathscr{D}$ entraîne $x + 1 \in \mathscr{D}$.

---

1. Souvenez-vous : une barre de fraction $\Longrightarrow$ réflexe : le dénominateur peut-il s'annuler ?
2. Même réflexe, mais avec des $\sim$

Soit $x \in \mathscr{D}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_N(x+1) &= \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n-1-x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+x+1} \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n-x}\right) + \frac{1}{1+x} + \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n+x} \qquad \textit{(Avec des pointillés tout est clair)} \\
&= -\frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n-x} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n+x} \\
&= \varphi_N(x) + \frac{1}{N-x} + \frac{1}{N+x}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N-x} = 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{N+x} = 0$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \varphi_N(x) = \varphi(x)$, en passant à la limite dans l'égalité obtenue :

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D} \quad \varphi(x+1) = \varphi(x)}$$

Donc φ est périodique de période 1.

3) Continuité de φ.

a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{n^2-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-n, n\}$, donc en particulier sur $[0,1]$.

$$\forall x \in [0,1], \qquad u_n'(x) = \frac{2(n^2-x^2)+4x^2}{(n^2-x^2)^2} = 2\frac{n^2+x^2}{(n^2-x^2)^2} > 0$$

x	0		1
$u_n'(x)$		$+$	
u_n	0	$\nearrow$	$\dfrac{2}{n^2-1}$

b) Par parité, pour $n \geqslant 2$,

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x)|$$

D'après le tableau de variations de la question précédente, pour $n \geqslant 2$

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1) = \frac{2}{n^2-1}$$

Ainsi $\|u_n\|_\infty \sim \dfrac{2}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\sum\limits_{n\geqslant 2} \|u_n\|_\infty$ converge.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 2} u_n \text{ converge normalement sur } [-1,1]}$

c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, donc converge simplement sur cet intervalle : sa somme $g(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est définie pour tout $x \in [-1,1]$.

Montrons la continuité de g sur $I = [-1,1]$:

- La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge normalement sur I d'après b, donc converge uniformément sur cet intervalle.

- Pour tout $n \geqslant 2$, u_n est continue sur I.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, sa somme g est continue sur I. En résumé :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est définie et continue sur } [-1,1]}$$

d) Soit $x \in]0,1[$, par définition de φ et de g,

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2} - g(x)}$$

On vient donc de transformer notre somme infinie de fonctions, φ, en une somme finie : tout devient plus simple.

e) D'après 3d, φ est une somme finie de fonctions définies et continues sur $]0,1[$, donc φ est continue sur $]0,1[$. De plus, d'après 2d, φ est 1-périodique, donc

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur } \mathscr{D}}$$

4) Étude de φ au voisinage de 0 et de 1.

a) D'après 2c, g, définie sur $[-1,1]$, est continue en 0, donc

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2 \times 0}{n^2 - 0^2} = 0$$

Attention, la première égalité est exactement la continuité de g, qui n'est pas automatique — ici elle a été obtenue par la convergence uniforme. On se place sur $[-1,1]$ pour avoir la limite en 0, et non pas uniquement la limite en 0^+.

D'après 3d, pour tout $x \in]0,1[$ $\varphi(x) - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2x}{1-x^2} - g(x)$. Cette formule reste vraie sur $]-1,0[$, ainsi

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = 0}$$

b) D'après 4a, $\varphi(x) - \dfrac{1}{x} = o(1)$. Donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(1)$$

Ceci s'appelle un développement asymptotique – c'est une généralisation des développements limités, que vous pratiquez déjà lorsqu'on fait « un DL en $\frac{1}{n}$ ». Ici, nous obtenons d'ailleurs un résultat plus fort que l'équivalent : l'équivalent nous dit juste $\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

$$\boxed{\varphi(x) \sim \frac{1}{x}}$$

4c

c) *Étude ailleurs qu'en 0 (ou $\pm\infty$) ? poser $x = a + h$.*

Posons $x = 1 + h$. Par 1-périodicité de φ et d'après , $\varphi(1+h) = \varphi(h) \sim \dfrac{1}{h}$, donc

$$\boxed{\varphi(x) = \varphi(x-1) \sim \frac{1}{x-1}}$$

Partie 2 (Étude de l'opérateur T)

1) Si $x \in [0,1]$, $\dfrac{x}{2} \in [0,1]$ et $\dfrac{x+1}{2} \in [0,1]$ aussi : T est bien défini.

- Montrons que T est linéaire :

  Je rappelle la méthode : 2 temps. D'abord écrire avec les notations du cours :
  Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $(x,y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
  Puis identifier E, x, y, et traduire dans les notations de l'énoncé.

  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f et $g \in E$.

$$\forall x \in [0,1], \qquad \begin{aligned} T(\lambda f + g)(x) &= (\lambda f + g)\Big(\frac{x}{2}\Big) + (\lambda f + g)\Big(\frac{x+1}{2}\Big) \\ &= \lambda f\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x}{2}\Big) + \lambda f\Big(\frac{x+1}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big) \\ &= \lambda T(f)(x) + T(g)(x) \end{aligned}$$

  Donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$: T est linéaire.

- Montrons que $T : E \to E$: Soit $f \in E$.

  La fonction $x \mapsto f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = T(f)(x)$ est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues sur $[0,1]$.

  Donc $T(f) \in E$.

Conclusion : $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$

2) a) *Même méthode.*

- Toute fonction $P \in F_n$ est polynomiale, donc continue : $F_n \subset E$. *Dans les cas non complètement évident, ne pas oublier de préciser pourquoi nous sommes bien dans E.*
- La fonction nulle, définie par $(a_0, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$, est un élément de F_n. Donc $F_n \neq \emptyset$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et P et $Q \in F_n$ définies par

$$\forall x \in [0,1] \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{et} \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

  Alors $\forall x \in [0,1]$, $\quad (\lambda P + Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ avec $c_k = \lambda a_k + b_k$. Donc $\lambda P + Q \in F_n$.

Conclusion : $\boxed{F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

$$\boxed{\dim F_n = n + 1}$$

La fonction $P \mapsto (a_0, \ldots, a_n)$ est linéaire et bijective de F_n dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Soit $P \in F_n$. $P\Big(\frac{x}{2}\Big)$ et $P\Big(\frac{x+1}{2}\Big)$ sont polynomiales car P l'est, et de degré égal au degré de P. Donc, en identifiant fonction polynomiale et polynome,

$$\deg\Big(T(P)(x)\Big) \leqslant \deg P \leqslant n$$

Par conséquent, $\boxed{T(P) \in F_n}$

c) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
T(P_0)(x) &= 1+1 = 2 = 2P_0(x)\\
T(P_1)(x) &= \frac{x}{2} + \frac{x+1}{2} = x + \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}P_0(x) + P_1(x)\\
T(P_2)(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2+2x+1}{4}\\
&= \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{1}{2}P_2(x)\\
T(P_3)(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^3+3x^2+3x+1}{8}\\
&= \frac{1}{8}P_0(x) + \frac{3}{8}P_1(x) + \frac{3}{8}P_2(x) + \frac{1}{4}P_3(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} T(P_0) & T(P_1) & T(P_2) & T(P_3) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1 & 1/2 & 3/8\\ 0 & 0 & 1/2 & 3/8\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_0\\ P_1\\ P_2\\ P_3 \end{array}
\end{array}$$

Conclusion : la matrice de T_3 dans la base canonique de F_3 est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/4 & 1/8\\ 0 & 1 & 1/2 & 3/8\\ 0 & 0 & 1/2 & 3/8\\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

d) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
T(P_k)(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^k + \left(\frac{x+1}{2}\right)^k\\
&= \frac{x^k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^j && \text{(formule du binôme)}\\
&= \frac{1}{2^{k-1}}x^k + \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j && \text{où } \deg\left(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}x^j\right) \leqslant k-1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg\left(T_n(P_k)\right) = k$.
Donc la famille $\left(T_n(P_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est de degré échelonné. C'est donc une famille libre.
De plus, $\mathrm{Card}\left(\left(T_n(P_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}\right) = n+1 = \dim F_n$. Donc $\left(T_n(P_k)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de F_n.
Ainsi, T_n transforme une base de F_n en une base de F_n :

$$\boxed{T_n \text{ est un isomorphisme}}$$

3) Étude du noyau de l'endomorphisme $(2\,\mathrm{id}_E - T)$.

a) Par définition du noyau,

$$\begin{aligned}
f \in E_2 &\implies (2\,\mathrm{id}_E - T)(f) = 0\\
&\implies 2f - T(f) = 0\\
&\implies T(f) = 2f
\end{aligned}$$

Et réciproquement, $T(f) = 2f \implies f \in E_2$. En conclusion,

$$\boxed{f \in E_2 \iff \forall x \in [0,1],\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)}$$

b) En considérant $f = P_0 = 1$, la fonction constante égale à 1,

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 1 + 1 = 2 = 2f(x)$$

Ainsi, d'après 3a, $f = 1 \in E_2$ et

$$\boxed{E_2 \neq \{0\}}$$

c) Soit $f \in E_2$ fixé.
La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in [0,1] \text{ et } x_1 \in [0,1] \text{ tels que } f(x_0) = m = \min_{x\in[0,1]} f(x) \text{ et } f(x_1) = M = \max_{x\in[0,1]} f(x)}$$

d) Supposons $f\left(\frac{x_0}{2}\right) \neq m$.

Comme m est le minimum de f, $f\left(\frac{x_0}{2}\right) > m$. De même, $f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \geqslant m$. Ainsi,

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) > m + m = 2m$$

De plus, $f \in E_2$:

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0) = 2m$$

Ce qui est absurde, donc

$$\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m}$$

e) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par définition de x_0.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. En posant $\widetilde{x}_0 = \frac{x_0}{2^n}$, $\mathcal{H}_n$ s'écrit $f(\widetilde{x}_0) = m$, et le résultat de la question 3d appliqué à $\widetilde{x}_0$ s'écrit

$$f\left(\frac{\widetilde{x}_0}{2}\right) = m$$

Or $\frac{\widetilde{x}_0}{2} = \frac{x_0}{2^{n+1}}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m}$

f) La fonction f est continue en 0, et $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_0}{2^n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$.

Or, d'après 3e, la suite $\left(f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)\right)_n$ est constante égale à m. Donc

$$\boxed{f(0) = m}$$

g) *On peut appliquer le résultat trouvé en 3f à la fonction $-f$ de minimum $-M$, on trouve alors $-f(0) = -M$, donc $f(0) = M$. Ou bien on peut refaire le raisonnement.*
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par définition de x_1.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et $\mathcal{H}_{n+1}$ fausse. Comme $f \in E_2$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1}{2^{n+1}}\right) + f\left(\frac{x_1/2^n + 1}{2}\right) &> M + M = 2M \\ &= 2f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = 2M \end{aligned}$$

Ce qui est absurde. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M}$

Par continuité de f en 0, de même qu'en 3f, $f(0) = M$. Conclusion :

$$\boxed{m = M}$$

h) *Savoir détecter les questions faciles : tout le monde sait faire cette question.*
Par définition du maximum M et du minimum m de f sur $[0,1]$,

$$\forall x \in [0,1] \qquad m \leqslant f(x) \leqslant M$$

Donc si $m = M$, $f(x) = m$ pour tout x, et

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

i) Montrons l'égalité par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ D'après 3h,

$$f \in E_2 \Longrightarrow f \text{ est constante}$$

Donc $E_2 \subset \{f \in E \mid f \text{ constante }\}$.

$\boxed{\supset}$ *On a en fait déjà montré cette inclusion en 3b, car $1 \in E_2$ et E_2 sous-espace vectoriel entraîne $\mathrm{Vect}\,(1) \subset E_2$.*

$$\begin{aligned} f = m \text{ constante} &\Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2m = 2f(x) \\ &\Longrightarrow f \in E_2 \end{aligned} \tag{3a}$$

Donc $\{f \in E \mid f \text{ constante }\} \subset E_2$.

Conclusion :

$$\boxed{E_2 = \{f \in E \mid f \text{ constante }\}}$$

4) Étude de la fonction cot.

a) La fonction cot est définie dès que le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour $\pi x \notin \pi\mathbb{Z}$, ce qui signifie $x \in \mathscr{D}$.
De plus, la fonction cot est alors continue comme quotient d'une fonction continue par une autre fonction continue, qui ne s'annule jamais.
La fonction cot est le quotient d'une fonction paire par une fonction impaire, elle est donc impaire.
De plus, $\forall x \in \mathscr{D}$, $\cot(x+1) = \pi\dfrac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi\dfrac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \cot(x)$.

$$\boxed{\text{La fonction cot est définie et continue sur } \mathscr{D}\text{, elle est impaire et périodique de période 1}}$$

b) *Un DL ! Autre question faisable perdue dans cette partie. Surtout : prendre son temps, ne pas sauter d'étape.*
Les développements limités de sin et cos nous donnent

$$\cos(\pi x) = 1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sin(\pi x) = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + o(x^3)$$

D'où

$$\begin{aligned}
\cot(x) &= \pi \frac{1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)}{\pi x - \frac{\pi^3}{6}x^3 + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)\Big)\frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)} && \text{(pour faire apparaitre } \frac{1}{1+u}\text{)} \\
&= \frac{1}{x}\Big(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x^2)\Big)\Big(1 + \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)\Big) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x^2 + o(x^2)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x + o(x)}
\end{aligned}$$

Il faut savoir faire un DL. Ce n'est pas négociable.

c) Posons $x = 1 + h$. Comme d'après 4a cot est 1-périodique,

$$\boxed{\cot(1+h) = \cot(h) = \frac{1}{h} - \frac{\pi^2}{3}h + o(h)}$$

d) Soit $x \in \mathscr{D}$. Si $\frac{x}{2} = k \in \mathbb{Z}$, alors $x = 2k \in 2\mathbb{Z}$ est un entier (pair), ce qui est absurde.
De même, si $\frac{x+1}{2} = k \in \mathbb{Z}$, alors $x = 2k - 1 \in -1 + 2\mathbb{Z}$ est un entier, ce qui est absurde.
Conclusion : $\boxed{\frac{x}{2} \in \mathscr{D} \text{ et } \frac{x+1}{2} \in \mathscr{D}}$

e) Soit $x \in \mathscr{D}$. D'après ci-dessus, $\frac{x}{2} \in \mathscr{D}$ et $\frac{x+1}{2} \in \mathscr{D}$, donc la formule à montrer est bien définie.

$$\cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \pi\frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi\frac{-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\
&= \pi\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} && \text{(Formules de trigo :} \\
&= \pi\frac{2\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} && \text{savoir qu'elles existent)} \\
&= 2\cot(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}, \qquad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)}$$

5) Calcul de φ.

a) Soit $x \in \mathscr{D}$ fixé. D'après 1.2b, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right)$$

Comme $x/2$ et $(x+1)/2 \in \mathscr{D}$, il vient *Dans cette question, les pointillés vous sauvent, puis il faut savoir le rédiger avec des* $\sum$.

$$\begin{aligned}
\varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x} - \frac{2}{2n+x}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-x} - \frac{1}{2n+x}\right)\right) && \textit{On reconnaît } \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} \textit{ : bien !} \\
\varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{2}{x+1} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x-1} - \frac{2}{2n+x+1}\right) \\
&= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{(2n-1)-x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{(2n+1)+x}\right) && \textit{Décalons : on veut } \frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x} \\
&= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{(2n+1)-x} - \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{(2n+1)+x}\right) \\
&= \frac{2}{x+1} - \left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{2}{(2n+1)-x} - \frac{2}{(2n+1)+x}\right) + \frac{2}{2N+1+x} - \frac{2}{x+1} \\
&= -2\left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(2n+1)-x} - \frac{1}{(2n+1)+x}\right) + \frac{2}{2N+1+x}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-x} - \frac{1}{2n+x}\right) - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{2n+1-x} - \frac{1}{2n+1+x}\right) + \frac{2}{2N+1+x}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{x} - \sum_{p=0}^{2N}\left(\frac{1}{p-x} - \frac{1}{p+x}\right) + \frac{2}{2N+1+x}\right) \\
&= 2\varphi_{2N}(x) + \frac{2}{2N+1+x}
\end{aligned}$$

Toujours les mêmes idées :

- *utiliser des sommes finies, pour la sécurité des calculs ;*
- *écrire les sommes avec des pointillés – bien clairement, en prenant la place qu'il faut sur la feuille de brouillon – pour comprendre ce qui se passe.*

Ainsi, en passant à la limite lorsque $N \to +\infty$,

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)}$$

b) La fonction $h = \varphi - \cot$ est continue sur $]0,1[$ comme différence de fonctions continues sur $]0,1[$. De plus, d'après 1.4a et 2.4b, au voisinage de $x = 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(1) \qquad \text{et} \qquad \cot(x) = \frac{1}{x} + o(1)$$

Donc $h(x) = o(1)$: c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. Donc h se prolonge par continuité en 0 par

$$\boxed{h(0) = 0}$$

De même en $x = 1$, les développements asymptotiques sont

$$\varphi(1+h) = \frac{1}{h} + o(1) \qquad \text{et} \qquad \cot(1+h) = \frac{1}{h} + o(1)$$

Donc h est prolongeable par continuité en $x = 1$ par $h(1) = 0$.

Comme la limite obtenue en 0 est une vraie limite en 0 et non en 0^+, on pouvait aussi utiliser la 1-périodicité pour en déduire la limite en 1, sans refaire les calculs.

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction } h = \varphi - \cot \text{ se prolonge par continuité sur } [0,1]}$

c) Pour tout $x \in]0,1[$, d'après respectivement 2.5a et 2.4e,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=2\varphi(x) \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right)+\cot\left(\frac{x+1}{2}\right)=2\cot(x)$$

Donc $\forall x \in]0,1[,\ h\left(\frac{x}{2}\right)+h\left(\frac{x+1}{2}\right)=2h(x)$.

Par continuité de h en 0 et en 1, cet égalité reste vraie pour $x=0$ et $x=1$.

Par conséquent, h, qui est continue sur $[0,1]$, appartient à E_2 :

$$\boxed{h \in E_2}$$

La continuité de h sur le segment *$[0,1]$ – et le fait qu'elle vérifie l'équation sur $[0,1]$ – est centrale. En effet,* cot *vérifie aussi l'équation, mais seulement sur $]0,1[$: c'est ce qui lui permet de ne pas être constante, contrairement aux fonctions de E_2. Donc non seulement le fait d'être sur un segment est au coeur de la preuve (2.3.c), mais en supprimant cette hypothèse une fonction qui vérifie l'équation de E_2 n'est plus forcément constante.*

d) D'après la question 3i, E_2 est l'ensemble des fonctions constantes. Donc h, qui appartient à E_2 d'après 5c, est une fonction constante.

Or d'après le calcul effectué au 5b, $h(0)=0$. Donc $h=0$.

C'est-à-dire $\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x)=\cot(x)$. De plus, d'après 1.2.d et 2.4.a, ce sont des fonctions 1-périodique. Donc par translation de 1 sur la variable x, l'égalité est vraie sur $\mathscr{D}$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi = \cot}$$

6) Application.

a) D'après 2.4b, $\cot(x)=\frac{1}{x}-\frac{\pi^2}{3}x+o(x)$. Donc

$$\frac{1-x\cot(x)}{2x^2}=\frac{1-(1-\frac{\pi^2}{3}x^2+o(x^2))}{2x^2}=\frac{\pi^2}{6}+o(1)$$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-x\cot(x)}{2x^2}=\frac{\pi^2}{6}}$

Un calcul de limite d'une fonction composée de fonctions usuelles : on peut toujours en venir à bout avec un DL.

b) Notons $f_n(x)=\frac{1}{n^2-x^2}$ pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in I=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

La fonction f_n est définie et continue sur I. De plus elle a pour tableau de variations

x	$-1/2$		0		$1/2$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$f_n(1/2)$	$\searrow$	$1/n^2$	$\nearrow$	$f_n(1/2)$

$$\forall x \in I \quad f_n'(x)=\frac{2x}{(n^2-x^2)^2}$$

Donc $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n^2-1/4}$. Or $\|f_n\|_\infty \sim \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente (Riemann, $\alpha=2>1$). Ainsi, par comparaison, $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur I.

Comme les f_n sont continues, c'est aussi le cas de la fonction somme :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie et continue sur } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$$

c) La fonction S est en particulier continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} S(x) = S(0)$. Ce qui s'écrit :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$$

d) En remplaçant φ par son expression, on a

$$\forall x \in \mathscr{D} \qquad \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(1 - 1 + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\right) = S(x)$$

D'après 5d, $\cot = \varphi$. Donc 6a s'écrit

$$\lim_{x \to 0} S(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Or d'après 6c, $\lim\limits_{x \to 0} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 2 (Mines-Ponts PC 2022, partiel)

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ sera noté

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On admettra l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On admettra aussi la convergence, pour tout $u \in]-1, 1[$, de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} -\frac{u^n}{n}$ ainsi que sa valeur

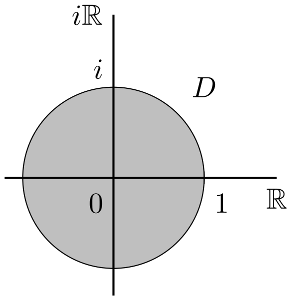
1) Par définition de D, $u = |z| < 1$ donc, d'après l'énoncé, $\sum \frac{|z|^n}{n}$ converge. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n} \text{ converge absolument donc converge}}$$

Toujours d'après l'énoncé, comme $\forall u \in]-1, 1[$, $\ln(1-u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{u^n}{n}$, il vient

$$\boxed{\forall z \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)}$$

2) Le disque D dans $\mathbb{C}$:



Si $z=0$, $tz \in D$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Si $z \neq 0$,

$$\begin{aligned} tz \in D &\Longrightarrow |tz| < 1 \\ &\Longrightarrow |t| < \frac{1}{|z|} \\ &\Longrightarrow t \in]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[\end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} t \in]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[&\Longrightarrow |t| < \frac{1}{|z|} \\ &\Longrightarrow |tz| < 1 \\ &\Longrightarrow tz \in D \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } z \neq 0,\ tz \in D \text{ si et seulement si } t \in]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[\text{ ; sinon, si } z=0,\ tz \in D \text{ si et seulement si } t \in \mathbb{R}}$$

Domaine de définition de Φ :
La fonction L est définie sur D, donc Φ est définie si $tz \in D$. D'après ci-dessus, Φ est définie sur $I=\mathbb{R}$ lorsque $z=0$, et sur $I=]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[$ lorsque $z \neq 0$.
Comme $|z|<1$, dans les deux cas $[-1,1] \subset I$ et l'intervalle I est ouvert.
Dérivabilité de Φ : *Vous verrez plus tard dans l'année que cette série de fonction est une série entière, et qu'il y a des théorèmes spécifiques aux séries entières qui donnent immédiatement le résultat voulu.*
Si $z=0$, $\Phi(t)=L(0)=0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc dérivable sur cet intervalle.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n : t \mapsto \frac{z^n}{n} t^n$, définie sur I.
Soit $0<r<1/|z|$.

- Montrons que $\sum u_n$ converge simplement sur $[-r,r]$: d'après ci-dessus, Φ est définie sur I, c'est-à-dire $\sum u_n$ converge simplement sur I, donc sur $[-r,r]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$, donc en particulier $\mathscr{C}^1$, sur I, et

$$\forall t \in I, \quad u_n'(t) = z^n t^{n-1}$$

- Montrons que $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[-r,r]$. *Oui, habituellement on commence par la convergence simple. Mais ici la convergence normale est immédiate, et entraîne tout le reste.*

$$\forall t \in [-r,r], \quad |u_n'(t)| = |z|^n |t|^{n-1} \leqslant \frac{1}{|z|}(|z|r)^{n-1}$$

Ainsi, en passant à la borne supérieure,

$$\|u_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{|z|}(|z|r)^n$$

Or $q = |z|r < 1$ par construction de r. Ainsi, la série géométrique $\sum \frac{1}{|z|}(|z|r)^n$ converge.

Donc $\sum \|u_n'\|_\infty$ converge : $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-r, r]$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$ et

$$\begin{aligned}\forall t \in [-r, r], \quad \Phi'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} \qquad \textit{Une somme usuelle commence généralement à } n = 0 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} t^n \\ &= z \sum_{n=0}^{+\infty} (zt)^n \\ &= \frac{z}{1 - zt}\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout intervalle $[-r, r] \subset \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[$,

$$\boxed{\text{La fonction } \Phi \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}\right[, \text{ qui contient } [-1, 1], \text{ et } \Phi'(t) = \frac{z}{1 - zt} \text{ pour } t \in [-1, 1].}$$

3) Si $z = 0$, $\Psi = 1$ est constante, et $\exp(L(0)) = \exp(0) = 1 = \frac{1}{1 - 0}$.

Supposons $z \neq 0$. Comme $\Psi(t) = (1 - tz) \exp(\Phi(t))$ pour tout $t \in [0, 1]$, Ψ est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables sur $[0, 1]$. De plus, d'après 2,

$$\begin{aligned}\forall t \in [0, 1], \quad \Psi'(t) &= -ze^{\Phi(t)} + (1 - tz)\Phi'(t)e^{\Phi(t)} \qquad \text{Or } \Phi'(t) = \frac{z}{1 - zt} \text{ d'après 2,} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Psi \text{ est constante sur } [0, 1],}$ égale à 1 car $\Psi(0) = \exp(0) = 1$.

Par conséquent, pour tout $t \in [0, 1]$, $\exp(L(tz)) = \frac{1}{1 - zt}$. Ce qui nous donne, pour $t = 1$,

$$\boxed{\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}}$$

Ces deux questions sont un cas particulier de l'exercice 5 de la feuille d'intégration (théorème de relèvement).

4) *Questions 4 et 5 : Le plus sage, généralement, lorsqu'on manipule des sommes infinies, est de commencer par manipuler la somme jusqu'à N, puis prendre la limite : dissocier les deux opérations, somme et limite.*

<u>Majoration</u> : Soit $z \in D$: en particulier, $u = |z| \in]-1, 1[$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|z|^n}{n}$$

De plus, comme $z \in D$, $\sum_n \frac{z^n}{n}$ converge vers $L(z)$ d'après 1, et comme $u = |z| \in]-1, 1[$, d'après l'énoncé, $\sum_n \frac{u^n}{n}$ converge vers $-\ln(1 - u)$. Ainsi, en passant à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus,

$$\boxed{|L(z)| \leqslant -\ln(1 - |z|)}$$

Petite vérification : $|z| > 0$ donc $1 - |z| < 1$ et $\ln(1-|z|) \leqslant 0$. On a bien majoré par une quantité positive.

Convergence de $\sum L(z^n)$: Soit $z \in D$. Comme $|z|^n < 1$, $z^n \in D$ et l'inégalité précédente s'écrit

$$|L(z^n)| \leqslant -\ln(1-|z|^n)$$

De plus, en 0, $\ln(1-u) \sim -u$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^n = 0$ ($|z| < 1$), donc, lorsque $n \to +\infty$,

$$-\ln(1-|z|^n) \sim |z|^n$$

Or $\sum |z|^n$ est une série convergente (géométrique, $|z| < 1$), donc par théorème de comparaison $\sum -\ln(1-|z|^n)$ converge absolument, et par théorème de majoration $\sum L(z^n)$ converge absolument donc converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} L\left(z^n\right) \text{ est convergente pour tout } z \text{ dans } D}$$

5) Expression de $P(z)$: Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) &= \prod_{n=1}^{N} \exp\left(L(z^n)\right) && \text{Car la somme est finie} \\ &= \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n} && \text{D'après 3} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} L(z^n)$ existe et est finie d'après 4, et exp est continue sur $\mathbb{C}$, donc

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right) = \exp\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right)$$

C'est-à-dire, d'après le calcul ci-dessus,

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n} = P(z)}$$

$\ln(P(e^{-t}))$: Soit $t > 0$. Comme $e^{-t} \in]0,1[\subset D$, $P(e^{-t})$ est bien défini, et d'après ci-dessus,

$$P(e^{-t}) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-nt} \in]0,1[$, d'où $\dfrac{1}{1-e^{-nt}} > 0$ et les ln suivants sont bien définis,

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = \sum_{n=1}^{N} -\ln(1-e^{-nt})$$

De plus, par passage à la limite dans le produit ci-dessus, $P(e^{-t}) = \lim\limits_{N\to+\infty} \prod\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1-e^{-nt}} \in [0,+\infty[$.

Par définition, $P(z) = \exp(Z)$, donc par propriété de l'exponentielle complexe [3] $P(z) \neq 0$.
Ainsi, par continuité du ln en $P(e^{-t}) > 0$,

3. $e^Z e^{-Z} = e^{Z-Z} = e^0 = 1$ donc $e^Z \neq 0$

$$\ln P(e^{-t}) = \ln\left(\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-nt}}\right) = \lim_{N\to+\infty}\ln\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-e^{-nt}}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\ln P\left(e^{-t}\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-e^{-nt}\right)}$$

6) Appliquons le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions. Posons

$$\forall u \in]0,+\infty[, \qquad f_n(u) = -\frac{e^{-nu}}{n}$$

Il faut exclure 0, car la série $\sum \frac{e^{-nu}}{n}$ *ne converge pas en* $u=0$.

- Convergence simple : Pour tout $u \in]0,+\infty[$, $e^{-u} \in]-1,1[$, donc on peut remplacer dans le développement en série (entière) donné par l'énoncé :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{e^{-nu}}{n} = \ln(1-e^{-u})$$

  C'est-à-dire, $\sum f_n$ converge simplement vers $f : u \mapsto \ln(1-e^{-u})$.
  Les f_n et f sont continues donc continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t>0$, $|f_n(t)| = \frac{1}{n}e^{-nt}$.
  Or, d'après le cours, $\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge ($n>0$).
  Donc f_n intégrable sur $]0,+\infty[$.
- Convergence de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

  Or, d'après Riemann, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$).
  C'est-à-dire $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, $\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n^2}$, et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \ln\left(1-e^{-u}\right)\mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}}$$

C'est, à une intégration par parties près sur f, *l'exercice 13 de la feuille suites et séries de fonctions :* $f(x) = \frac{x}{e^x-1} = x \times \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.