

Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (PT 2016) 1) Pour tout réel x ,

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + \mu = (x + \lambda)^2 - \lambda^2 + \mu$$

Posons $\alpha = \mu - \lambda^2 > 0$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$. Alors

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha \left(\frac{1}{\alpha} (x + \lambda)^2 + 1 \right) = \alpha (1 + \beta^2 (x + \lambda)^2)$$

En conclusion, $\alpha = \mu - \lambda^2$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$ vérifient $x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha (1 + \beta^2 (x + \lambda)^2)$

2) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$.

Comme le discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\mu < 0$ par hypothèse, $x^2 + 2\lambda x + \mu$ ne s'annule jamais et la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Étude en $+\infty$: $f(x) \sim \frac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n \geq 0$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}} dx$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n + 2 \geq 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge absolument donc converge.

Étude en $-\infty$: De même, $f(x) \sim \frac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n \geq 0$, donc $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^{2n+2}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}} dx$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n + 2 \geq 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$ converge absolument donc converge.

En conclusion, I_n converge

Calcul de I_0 : $\frac{1}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + (\beta(x + \lambda))^2}$ d'après 1), avec $\alpha = \frac{1}{\beta^2}$. Donc

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta dx}{1 + (\beta(x + \lambda))^2} = \beta \left[\text{Arctan} (\beta(x + \lambda)) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \beta\pi$$

Conclusion : $I_0 = \beta\pi$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = x$ et $v = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$. Comme $uv \sim_{\infty} \frac{1}{x^{2n-1}}$ avec $2n - 1 > 0$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} uv = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} uv = 0$$

D'où l'intégration par partie suivante :

$$I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, donc

$$I_{n-1} = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} dx = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

Par conséquent, $I_n = \frac{(2n-1)I_{n-1}}{2n}$

b) Cherchez au brouillon pour les premiers termes, comme d'habitude. Une fois que vous avez une formule bien propre, comme vous l'avez obtenu avec des « ... », il faut faire une récurrence.

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- \mathcal{H}_0 : d'après 2), $I_0 = \beta\pi$, et ici $\beta = 1$. Ainsi $\frac{(2 \times 0)!}{2^0(0!)^2} \pi = \pi = I_0$.
- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons \mathcal{H}_n vraie. D'après a),

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n = \frac{2n(2n-1)}{2^{2n}n^2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2} \pi$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

- **Conclusion** : $\forall n \geq 0 \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi$

Pour compléter un peu les résultats de l'exercice, et confirmer votre impression de « déjà vu », on peut effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans I_n .

Comme $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ et $(1+x^2)^{n+1} = (1+\tan^2 t)^{n+1} = (1/\cos^2 t)^{n+1}$, on trouve

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \frac{1}{\cos^2 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t dt = 2W_{2n}$$

Wallis! On retrouve aussi le v_n du devoir ($x = \sqrt{nt}$), mais le calcul de v_n n'avait pas été fait.

Exercice 2 (CCINP 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

1) Soit $x > 0$ fixé.

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison, $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge. Conclusion :

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$

2) Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}}$$

3) Soit $x > 0$.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = (-1)^k \frac{1}{(x+k)^2}$ avec $\frac{1}{(x+k)^2} \geq 0$. Donc $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée.
- $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ est une suite décroissante car $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = 0$.

Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_k \varphi_k(x)$ converge (ce que l'on savait déjà), et le reste d'ordre n est majoré par $|\varphi_{n+1}(x)|$. Ce qui s'écrit

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}}$$

4) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$: La majoration précédente, en $n = 1$, s'écrit :

$$\forall x > 0, \quad \left| \varphi(x) - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$$

Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$, par majoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - \frac{1}{x^2} = 0$.

Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ entraîne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

De plus, d'après I.2, φ vérifie la seconde relation de (P). Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est une solution de (P)}}$$

I.2 - Unicité de la solution

5) Soit $x > 0$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

est vraie pour tout $n \geq 0$.

- \mathcal{H}_0 : s'écrit $f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x^2}$. C'est vraie par définition de la propriété (P).

- $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons \mathcal{H}_n vraie.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{d'après } \mathcal{H}_n \\ &= (-1)^{n+1} \left(-f(x+n+2) + \frac{1}{(x+n+1)^2} \right) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} && \text{en appliquant (P) en } x+n+1 \\ &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geq 0 \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

6) D'après (P), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. Donc, en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité précédente, il vient $f = \varphi$. Ainsi, f solution de (P) implique $f = \varphi$.

Réciproquement, à la question 4 nous avons montré que φ était solution de (P). Conclusion :

La fonction φ est l'unique solution de (P)

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

7) Calcul de norme infinie : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons, pour tout $x > 0$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \varphi(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$$

D'après la question 3,

$$\forall x \geq \varepsilon, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

Or $x \mapsto \frac{1}{(x+n+1)^2}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc sa borne supérieure est $\frac{1}{(n+1)^2}$ (on pouvait aussi prendre la borne sup sur $[\varepsilon, +\infty[$) et :

$$\forall x > 0, \quad |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

En passant à la borne supérieure sur $[\varepsilon, +\infty[$, il vient

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Convergence uniforme :

Par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. Comme $R_n = \varphi - S_n$, nous venons de montrer

La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$

Pour montrer la convergence uniforme en majorant R_n , il n'est pas nécessaire de se placer sur $[\varepsilon, +\infty[$: on peut se placer sur $]0, +\infty[$, et prendre $n \geq 1$: la différence $\varphi - S_n$ fait disparaître le problème de $\varphi_0 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ non bornée sur $]0, +\infty[$.

On pouvait aussi montrer la convergence normale, en calculant $\|\varphi_k\|_\infty = |\varphi_k(\varepsilon)| = \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, et en montrant que

$\sum \|\varphi_k\|_\infty$ converge (Riemann, ou la convergence simple absolue de la question 1 en $x = \varepsilon$). Puis la convergence normale entraîne la convergence absolue.

- 8) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $]0, +\infty[$.
 • D'après 7, $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, +\infty[$ de $]0, +\infty[$, donc sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de continuité,

La fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$

Comme φ est solution de (P),

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(x+1)$$

Or, d'après ci-dessus, φ est continue en 1 : lorsque $x \rightarrow 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(1) + o(1)$.

Donc $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(1) + o(1)$:

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

- 9) Convergence uniforme de $\sum \varphi'_k$: Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ fixé.

La fonction φ_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad \text{ph}i'_n(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Par décroissance de $|\varphi'_n|$ sur $]0, +\infty[$,

$$\|\varphi'_n\|_\infty = \frac{1}{(\varepsilon+n)^3}$$

Ainsi, $\|\varphi'_n\|_\infty \sim \frac{1}{n^3}$.

Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann, $\alpha = 3 > 1$), par théorème de comparaison, $\sum \|\varphi'_n\|_\infty$ converge :

La série $\sum \varphi'_k$ converge normalement donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$

Dérivée de φ :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
- La série $\sum \varphi_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ d'après 1.
- La série $\sum \varphi'_n$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Donc, d'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions,

$$\varphi \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

- 10) Le théorème des séries alternées s'applique à la série $\sum \varphi'_n$, comme il s'appliquait à $\sum \varphi_n$ lors de la question 3. Une des conséquences est que le signe du reste est celui du premier terme négligé. En considérant $R_{-1} = \varphi'$ et $\varphi'_{-1+1} = \varphi'_0$, la fonction φ' est du signe de $\varphi'_0(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$.

Donc $\varphi' < 0$ sur $]0, +\infty[$:

La fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$

11) Encadrons φ :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1) && \text{décroissance de } \varphi \text{ sur }]0, +\infty[\\ \implies \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varphi(x-1) \\ \implies \forall x \in]1, +\infty[, \quad & \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2} && (P) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}}$$

Puis

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad 1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$:

$$\boxed{\varphi(x) \sim \frac{1}{2x^2}}$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

12) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $f : t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$.
Étude en 0 : Si $k \geq 1$, $x+k-1 \geq x > 0$, donc, par croissance comparée,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, 1]$.

Si $k = 0$, montrons que $f(t) = o(1/t^{1-x/2})$: par croissance comparée, comme $x/2 > 0$,

$$t^{1-x/2} f(t) = t^{x/2} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, $f(t) = o(1/t^{1-x/2})$. Or $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x/2}} dt$ converge (Riemann en 0, $\alpha = 1 - x/2 < 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^1 f(t) dt$ converge. Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t) \text{ est intégrable sur }]0, 1]}$$

Vous avez tout de suite reconnu les intégrales de Bertrand. Pour les reconnaître : lorsque vous avez du t et du $\ln(t)$ qui interviennent (ici, $\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ avec $\alpha = -(x+k-1)$ et $\beta = -1$).

Vous pouviez aussi effectuer l'intégration par parties de ε à 1, puis passer à la limite : vous prouvez en même temps la convergence, donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant (négatif).

$$\text{Effectuons une intégration par parties : } \begin{cases} u = \frac{t^{x+k}}{x+k} & u' = t^{x+k-1} \quad (x+k \neq 0) \\ v = \ln(t) & v' = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Comme $x+k > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} uv = 0$ par croissance comparée, et le théorème d'intégration par parties nous dit que les deux intégrales sont de même nature, donc convergente d'après ci-dessus. Et

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt &= \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+k-1}}{x+k} dt \\ &= -\frac{1}{x+k} \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{(x+k)^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}$$

13) La fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0, 1]$ et, au voisinage de $t = 0$, $\frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} \sim t^{x-1} \ln(t)$.

Or, d'après la question 12, la fonction $t \mapsto t^{x-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ (cas $k = 0$).

Donc, par théorème de comparaison,

$$\text{La fonction } t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} \text{ est intégrable sur }]0, 1]$$

Soit $t \in]0, 1]$. La série géométrique $\sum_k (-t)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1+t}$$

Ainsi, en multipliant par $t^{x-1} \ln(t)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t) = \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $f_k :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1} \ln(t)$.

D'après la question 12, $\int_0^1 |f_k(t)| dt = \frac{1}{(x+k)^2} \sim \frac{1}{k^2}$. Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$),

donc par théorème de comparaison $\sum \int_0^1 |f_k(t)| dt$ converge.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est continue donc continue par morceaux sur $]0, 1]$.
- $\sum f_k$ converge simplement vers $f : t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ sur $]0, 1]$ d'après ci-dessus, et f est continue.
- La série $\sum \int_0^1 |f_k(t)| dt$ converge

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt$$

Or, d'après 12, $\int_0^1 f_k(t) dt = -\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, et $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. Par conséquent,

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt$$

Exercice 3 (CCINP 2021)**Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif****I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$**

1)

$$\begin{aligned}
(f_k(x))^2 - x &= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right)^2 - x \\
&= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}^2(x) + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)} - 4x \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}^2(x) - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}^2(x)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Donc $(f_k(x))^2 \geq x$. Comme $x \geq 0$ et $f_k \geq 0$, il vient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k(x) \geq \sqrt{x}}$$

2) Si $x = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_{k+1}(0) = \frac{1}{2}f_k(0)$: la suite est géométrique et décroissante.

Et si $x \neq 0$? Que faire ? C'est la question 2. Pas d'idées... la question 1 semblait sortie de nulle part : essayons de l'utiliser.

Si $x > 0$, d'après 1, $f_k(x) \geq \sqrt{x} > 0$. En passant à l'inverse,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f_k(x)} &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \\
\implies \frac{x}{f_k(x)} &\leq \sqrt{x} \leq f_k(x) && \text{toujours d'après 1} \\
\implies f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)} \right) &\leq \frac{1}{2} (f_k(x) + f_k(x)) = f_k(x)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. La suite $(f_k(x))_k$ est décroissante (d'après 2) minorée par \sqrt{x} (d'après 1), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ sa limite.

Si $x > 0$, la minoration $f(x) \geq \sqrt{x}$ nous donne $f(x) > 0$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, il vient

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{x}{f(x)} \right)$$

D'où $f(x)^2 = x$, puis $f(x) = \sqrt{x}$.

Si $x = 0$, La suite géométrique $(f_k(0))$ de raison $\frac{1}{2}$ converge vers $0 = \sqrt{0}$.

Finalement,

$$\boxed{(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = \sqrt{x} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+}$$

I.2 - Majoration de l'erreur

4) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) &= \frac{1}{2} \left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{x}{f_k(x)}\right) \quad (\text{développer plutôt que factoriser}) \\ &= -\sqrt{x} + \frac{1}{2} \left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) \\ &= f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \end{aligned}$$

Il est rare d'obtenir une relation de récurrence (lien entre f_k et f_{k+1} , plus généralement entre la valeur au rang k et celle au rang $k+1$) par récurrence. Cette relation, par contre, servira pour faire des récurrence dans peu de temps

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)}$$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : |f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}$$

est vraie pour tout $k \geq 1$.

- \mathcal{H}_1 : Comme $f_0 = 1$, $f_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{1})$, donc \mathcal{H}_1 est vraie.
- $\mathcal{H}_k \implies \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons \mathcal{H}_k vraie. Comme $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ (et $f_k > 0$), $\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leq 1$.

$$\begin{aligned} |f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| &= \frac{|f_k(x) - \sqrt{x}|}{2} \left|1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right| && \text{d'après 4} \\ &\leq \frac{1+x}{2^{k+1}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) && \mathcal{H}_k \\ &\leq \frac{1+x}{2^{k+1}} && \text{car } 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leq 1 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{H}_{k+1} est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geq 1 \quad |f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}}$

Exercice 4 (E3A PSI 2021)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \exp(-t^n)$ est continue donc continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.

Étude en $+\infty$:

$$\forall t \geq 1, \quad t^n \geq t$$

Puis, par décroissance de $x \mapsto e^{-x}$, $0 < e^{-t^n} \leq e^{-t}$.

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge ($\beta = 1 > 0$), donc, par théorème de majoration,

$$\boxed{I_n \text{ existe}}$$

2) Convergence simple : Soit $t > 1$ fixé.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = +\infty$, et $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0$.

Donc (f_n) converge simplement vers $f = 0$ sur $]1, +\infty[$.

L'intégrale est généralisée, donc pas de théorème avec convergence uniforme. De plus, si on regarde la convergence simple sur $[1, +\infty[$, f n'est pas continue en 1 : il n'y a pas convergence uniforme sur $[1, b]$ avec $b > 1$ fixé.

Théorème de convergence dominée :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue donc continue par morceaux sur $]1, +\infty[$, ainsi que f .
- (f_n) converge simplement vers f sur $]1, +\infty[$.
- D'après les calculs du 1, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f_n| \leq \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, les f_n et f sont intégrables sur $]1, +\infty[$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt = 0$$

Conclusion :

La suite (I_n) converge vers 0

- 3) La fonction $\psi : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ définie par $\psi(t) = t^n$ est \mathcal{C}^1 , strictement croissante et bijective. D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales ci-dessous sont de même nature, donc convergente car I_n l'est.

Avec les conventions habituelles, $du = nt^{n-1} dt$ donc $dt = \frac{1}{nu^{\frac{n-1}{n}}} du$. Les bornes sont inchangées.

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}} n} du$$

- 4) D'après la question précédente,

$$nI_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{1-\frac{1}{n}}} du$$

Convergence simple : Soit $g_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(u) = e^{-u}/u^{1-\frac{1}{n}}$. Soit $u > 1$ fixé.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = e^{-u}/u$.

Donc (g_n) converge simplement vers $g : u \mapsto e^{-u}/u$ sur $[1, +\infty[$.

Théorème de convergence dominée : Pour tout $u \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^{1-\frac{1}{n}} \geq 1$. Donc, par passage à l'inverse (tout est positif),

$$0 \leq g_n(u) = \frac{e^{-u}}{u^{1-\frac{1}{n}}} \leq e^{-u}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue donc continue par morceaux sur $[1, +\infty[$, ainsi que g .
- (g_n) converge simplement vers g sur $[1, +\infty[$.
- D'après les calculs ci-dessus, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |g_n| \leq \varphi$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, les g_n et g sont intégrables sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} g_n(u) du = \int_1^{+\infty} g(u) du$$

Conclusion :

La suite (nI_n) converge vers $J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$

5) Comme $g > 0$ sur $[1, +\infty[$, $J > 0$ et en particulier est non nulle.

Par conséquent, d'après 4, $nI_n \sim J$, puis

$$I_n \sim \frac{J}{n}$$

6) Pour tout $t \geq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t^n \leq t^{n+1}$, donc $f_n \geq f_{n+1}$: la suite (f_n) est décroissante. Par croissance de l'intégrale, (I_n) aussi est donc décroissante.

- Comme $I_n > 0$, $\sum (-1)^n I_n$ est alternée.
- D'après ci-dessus, (I_n) décroissante.
- D'après 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Donc, d'après le critère des séries alternée,

$$\sum (-1)^n I_n \text{ converge}$$

FIN DE L'ÉPREUVE