Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (BECEAS 2020)

1) a) i) Nous avons, au voisinage de $t = 0$, $g(t) \sim \dfrac{t}{t} = 1$, donc

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 1$$

Donc

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ par } g(0) = 1.}$$

ii) Appliquons le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$.

- La fonction g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de sin et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui le sont. Et

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad g'(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{t^2}$$

- Par construction, en i), g est continue en 0.
- Étudions la limite de g' en $t = 0$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{t + o(t^2) - t(1 - o(t))}{t^2} && \textit{il y a des sommes, donc forcément des o à cette étape} \\ &= \frac{o(t^2)}{t^2} \\ &= o(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} g'(t)$ existe – et vaut 0.

Par conséquent, d'après le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } g'(0) = 0}$$

b) i) Question de cours.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

ii) Effectuons un changement de variable : Posons $u = \varphi(t) = kt$.
La fonction $\varphi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($\varphi'(t) = k > 0$) et donc bijective.

$$\begin{cases} t = u/k \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u/k \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{si } t = 0, & \text{alors } u = 0 \\ \text{si } t \to +\infty, & \text{alors } u \to +\infty \end{cases}$$

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u/k} \frac{\mathrm{d}u}{k}$$

sont de même nature. Or la seconde est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u$, qui converge d'après i) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

De plus, d'après le théorème, nous avons égalité :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(kt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}}$$

c) Pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\ln(g(t)) &= \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \\
&= \ln\left(\frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6)}{t}\right) && \text{(développement limité de sin au voisinage de 0)} \\
&= \ln\left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^5)\right) && \text{or } \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \\
&= \left(-\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^5)\right)^2 + o((t^2)^2) && \text{car ici } u \sim t^2 \\
&= -\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{3!}\right)^2 + o(t^4) \\
&= -\frac{t^2}{3!} + \left(\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} - \frac{1}{2^3\times 3^2}\right)t^4 + o(t^4)
\end{aligned}$$

Or $\left(\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} - \frac{1}{2^3\times 3^2}\right) = \frac{3-5}{2^3\times 3^2\times 5} = -\frac{1}{2^2\times 3^2\times 5} = -\frac{1}{2\times 9\times 10} = -\frac{1}{180}$

Conclusion :

$$\boxed{\ln(g(t)) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)}$$

d) La fonction $f : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. De plus, $f \geqslant 0$.
<u>Étude en $+\infty$</u> : Par croissance comparée,

$$u^2 f(u) = u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$

Donc $u^2 f(u) = o(1)$,
D'où $f(u) = o\Big(\frac{1}{u^2}\Big)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$$

e) <u>Limite</u> : Lors de la question 1)d), nous avons admis que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Par définition de cette intégrale,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

<u>Équivalent</u> :

Vous avez du n dans la fonction intégrée et *dans les bornes : vous ne pouvez rien faire en l'état.*
la question e) est la dernière question de la question 1, et, juste avant, on étudiait l'intégrale de $e^{-\frac{u^2}{2}}$: essayons de nous y ramener. Évidemment, vous cherchez au brouillon : $-\frac{u^2}{2} = -\frac{nt^2}{6}$, donc $u^2 = \left(\sqrt{\frac{n}{3}}t\right)^2$.

Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{\frac{n}{3}}t$ $(n > 0)$.

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{n}{3}}t \\ \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{n}{3}}\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{si } t = 0, & \text{alors } u = 0 \\ \text{si } t = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, & \text{alors } u = \frac{\ln n}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Donc *(c'est un changement de variable sur un segment, il n'y a pas de question de convergence à traiter au préalable)*

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{\frac{3}{n}}\,\mathrm{d}u$$

Or, d'après d), $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \neq 0$, donc

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

a) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin^n t}{t^n}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

<u>Étude en 0</u> : Comme $\sin t \sim t$,

$$f(t) \sim \frac{t^n}{t^n} = 1$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$: la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (par $f(0) = 1$.

Ainsi, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0, donc convergente.

<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^n}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann, $\alpha = n \geqslant 2 > 1$).

Donc, par théorème de majoration, $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin 2t = 2\sin t\cos t}$

c) *Il y a **2** outils : intégration par parties et changement de variable. L'énoncé nous donne la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{d}t}$ *: tentons donc une intégration par parties !*

Posons $u : t \mapsto -\frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \sin^2 t$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle :

- En $t = 0$: $u(t)v(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$ donc $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$.
- Au voisinage de $+\infty$: $\forall t > 0$, $|u(t)v(t)| \leqslant \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

  Donc, par majoration, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

De plus,

$$\forall t \in]0,+\infty[, \qquad \begin{cases} u(t) = -\dfrac{1}{t} & u'(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ v(t) = \sin^2 t & v'(t) = 2\cos t \sin t \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ converge d'après a) (avec $n=2$).
Donc le théorème d'intégration par parties nous donne que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{2\cos t \sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\,\mathrm{d}t && \text{D'après b)} \\ &= \frac{\pi}{2} && \text{D'après 1)b)ii), avec } k=2 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

3) **a)** *Nous pouvons montrer que la dérivée k-ième de h_n est une combinaison linéaire de $\sin^i t \cos^j t$ avec $i+j=n$. Et en conclure que h_n^k est bornée. Cf. ci-dessous. Mais nous pouvons aussi utiliser une propriété plus abstraite : h_n est périodique, donc peut être vue comme une fonction continue sur un segment. Ce qui permet de conclure en 2 lignes et sans calculs.*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $T > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors, en dérivant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

toutes les dérivées $f^{(k)}$ pour $k \in [\![1,n]\!]$ sont T-périodiques.
De plus, supposons f continue sur $\mathbb{R}$: f est alors continue sur $[0,T]$ et donc bornée et atteint ses bornes sur $[0,T]$: $\sup\limits_{x\in[0,T]} |f|$ existe et est fini. Or f est T-périodique, donc $\sup\limits_{x\in[0,T]} |f| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f|$.
Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Ici, h_n est 2π-périodique et $\mathscr{C}^\infty$, donc, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $h_n^{(k)}$ est 2π-périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\exists K > 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |h_n^{(k)}(t)| \leqslant K}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \qquad \exists (a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \sin^j(t) \cos^{n-j}(t)$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- *$\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie : $(a_0^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}) = (0, \dots, 0, 1)$, et $h_n(t) = \sin^n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*
- *$\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie : il existe $(a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \sin^j(t) \cos^{n-j}(t)$$

Soit de tels $(a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dérivons la combinaison linéaire de produits :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k+1)}(t) &= \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \Big[\sin^j(t)\cos^{n-j}(t) \Big]' \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \Big[j\sin^{j-1}(t)\cos^{n-j+1}(t) - (n-j)\sin^{j+1}(t)\cos^{n-j-1}(t) \Big] \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} j\sin^{j-1}(t)\cos^{n-j+1}(t) - \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)}(n-j)\sin^{j+1}(t)\cos^{n-j-1}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}^{(k)}(j+1)\sin^j(t)\cos^{n-j}(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}^{(k)}(n-j+1)\sin^j(t)\cos^{n-j}(t) \Big]
\end{aligned}$$

En posant $a_j^{(k+1)} = a_{j+1}^{(k)}(j+1) + a_{j-1}^{(k)}(n-j+1)$ pour $j \in [\![0,n]\!]$ (en posant $a_j^{(k)} = 0$ si j hors de $[\![0,n]\!]$), nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k+1)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k+1)} \sin^j(t)\cos^{n-j}(t)$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- *Conclusion :*

$$\forall k \geqslant 0 \qquad \exists (a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \sin^j(t)\cos^{n-j}(t)$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. Soit $(a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ trouvés ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad |h_n^{(k)}(t)| &= \left| \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} \sin^j(t)\cos^{n-j}(t) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{n} \left| a_j^{(k)} \sin^j(t)\cos^{n-j}(t) \right| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{n} \left| a_j^{(k)} \right|
\end{aligned}$$

En posant $K = \sum_{j=0}^{n} \left| a_j^{(k)} \right|$, nous venons de montrer

$$\boxed{\exists K > 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |h_n^{(k)}(t)| \leqslant K}$$

b) i) Comme $\sin t \sim t$,

$$\boxed{h_n(t) \sim_0 t^n}$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{h_n(t) = t^n + o(t^n)}$$

ii) Comme h_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $h_n^{(k)}$ aussi, et elle possède donc un développement limité en $t = 0$ à tout ordre, en particulier à l'ordre $n-k$: il existe $P_{n-k} \in \mathbb{R}_{n-k}[X]$ tel que

$$h_n^{(k)}(t) = P_{n-k}(t) + o(t^{n-k})$$

En intégrant le développement limité de $h_n^{(k)}$, on montre que P_{n-k} est la dérivée k-ième du développement limité de h_n à l'ordre n :

$$P_{n-k} = (t^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}$$

Attention ! *On ne dérive jamais un DL si la fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^n$ avec n assez grand. Cf. $2x^3\sin(1/x^2) = o(x^2)$, exercice sur les fonctions d'une variable réelle.*
Là, encore une fois, il s'agit d'un théorème d'intégration maquillé.
Nous verrons plus tard dans l'année la théorie des séries entières, qui permettrait ici de s'affranchir des développements limités : h_n sera développable en série entière comme produit de fonction développables en série entière, et un développement en série entière se dérive terme à terme à l'intérieur de son domaine de convergence.

Nous avons donc obtenu l'équivalent $h_n^{(k)}(t) \sim \dfrac{n!}{(n-k)!}t^{n-k}$. D'où la limite :

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

c) Procédons comme à la question 2)a) : La fonction $f : t \mapsto \dfrac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0 : D'après b), $\lim\limits_{t\to 0}|f(t)| = |\dfrac{n!}{(n-k)!}| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$: la fonction $|f|$ est prolongeable par continuité en 0 (par $|f(0)| = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0, donc convergente.

Étude en $+\infty$:

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{n-k}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann, $\alpha = n-k \geqslant 2 > 1 : k \in [\![0, n-2]\!]$).

Donc, par théorème de majoration, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{h_n^{(k)}}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument}}$$

d) Convergence : Procédons comme à la question 1)b)i) : La fonction $f : t \mapsto \dfrac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Étude en 0 : D'après b), $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-1))!} = n!$: la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (par $f(0) = n!$).
  Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement généralisée en 0, donc convergente.
- Étude en $+\infty$:
  Posons $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v = h_n^{(n-2)}$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et de plus

$$\forall t \geqslant 1, \qquad |u(t)v(t)| = \frac{\left|h_n^{(n-2)}(t)\right|}{t} \leqslant \frac{K}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

  donc, par majoration, le produit uv admet une limite finie (nulle) en $+\infty$.

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad \begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v(t) = h_n^{(n-2)}(t) & v'(t) = h_n^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Or, d'après 3)a), $|u'(t)v(t)| = \left|\dfrac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{K}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de majoration,

$$\int_1^{+\infty} \frac{h_n^{(n-2)}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

est absolument convergente donc convergente.

Donc le théorème d'intégration par parties nous donne la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

- Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Égalité : *Comme pour toute récurrence, on commence au brouillon. On regarde les premières intégration par parties, ce qui permet d'identifier correction $\mathcal{H}_k$, et de montrer $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$. On vérifie à cette occasion qu'il s'agit bien d'une récurrence.*

Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{h_n(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t$. Cette intégrale est convergente d'après 2)a).

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

- $\mathcal{H}_0$ est vraie par hypothèse : $h_n^{(0)} = h_n$.
- $\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie, pour $k < n-1$.

$$I = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

Appliquons le théorème d'intégration par parties. D'après 3)c) ou 3)d), les intégrales convergent.

Posons, $u = h_n^{(k)}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{t^{-(n-k)+1}}{n-(k+1)}$. Ce sont deux fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et de plus le produit uv admet une limite finie (nulle) en $+\infty$ par majoration. En $t = 0$, d'après 3)b),

$$u(t)v(t) = \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k-1}} = t\frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} \sim t\frac{n!}{(n-k)!}$$

donc $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$.

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad \begin{cases} u(t) = h_n^{(k)}(t) & u'(t) = h_n^{(k+1)}(t) \\ v(t) = -\dfrac{t^{-(n-(k+1))}}{n-(k+1)} & v'(t) = t^{-(n-k)} \end{cases}$$

D'après le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} h_n^{(k)}(t)t^{-(n-k)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \left(\underbrace{[u(t)v(t)]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} h_n^{(k+1)}(t)\frac{t^{-(n-(k+1))}}{n-(k+1)}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{(n-1-(k+1))!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k+1)}(t)}{t^{n-(k+1)}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \qquad I = \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}}\,\mathrm{d}t$$

En particulier pour $k = n-1$, il vient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

4) a) $\boxed{\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}}$

b) Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
h_{2n}(t) &= \sin^{2n} t \\
&= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{(2i)^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(e^{it}\right)^{2n-k} \left(-e^{-it}\right)^k && \text{Formule du binôme} \\
&= \frac{1}{2^{2n}(-1)^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(2n-k)t} (-1)^k e^{-ikt} && \textit{On simplifie, sans sauter d'étape, sereinement} \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k-n} \binom{2n}{k} e^{i(2n-k-k)t} \\
&= \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t} && \text{Car } (-1)^{2n} = 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_{2n}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}}$$

c) Si $f(t) = e^{\alpha t}$, $f^{(k)}(t) = \alpha^k e^{\alpha t}$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par linéarité de la dérivation,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} (i(2n-2k))^{2n-1} e^{i(2n-2k)t}}$$

d) *Si on écrit nos exponentielles « avec des pointillés », on remarque que la somme s'écrit :*

$$\lambda_0 e^{2int} + \lambda_1 e^{2i(n-1)t} + \cdots + \lambda_{2n-1} e^{-2i(n-1)t} + \lambda_{2n} e^{-2int}$$

Donc on peut regrouper e^{2ijt} avec e^{-2ijt}. Faisons le proprement.

Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après ci-dessus,

$$\begin{aligned}
h_{2n}^{(2n-1)}(t) &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(i(2n-2k))^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{i^{2n-1}2^{2n-1}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\\
&= \frac{(-1)^n}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^{n+k}\binom{2n}{k}(n-k)^{2n-1}e^{i(2n-2k)t}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{2i}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{2n-j}\binom{2n}{n-j}j^{2n-1}e^{2ijt}\right. && \text{Avec } k=n-j\\
&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\binom{2n}{n+j}(-j)^{2n-1}e^{-2ijt}\right) && \text{Avec } k=n+j\\
&= \frac{(-1)^n}{2i}\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{2n}{2n-(n-j)}j^{2n-1}e^{2ijt}-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}e^{-2ijt}\right)\\
&= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\frac{e^{2ijt}-e^{-2ijt}}{2i}
\end{aligned}$$

Ainsi, en remarquant que $\sin(0)=0$,

$$\boxed{h_{2n}^{(2n-1)}(t)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt)}$$

e) D'après 3)d),

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t=\frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\frac{h_{2n}^{(2n-1)}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

D'après ci-dessus,

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\qquad h_{2n}^{(2n-1)}(t)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\sin(2jt)$$

D'après 1)b)ii) *Ne pas casser la somme par linéarité avant d'avoir vérifié que les intégrales convergent !*

$$\forall j\in\mathbb{N}^*,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sin(2jt)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } =\frac{\pi}{2}$$

Donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\mathrm{d}t &= \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\frac{\sin(2jt)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2jt)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(2n-1)!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\binom{2n}{n+j}j^{2n-1}}$$

5) a) Soit $n\geqslant 2$. Montrons que $\sqrt{n}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\,\mathrm{d}t=o(1)$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left|\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\right|\,\mathrm{d}t && \text{Inégalité de la moyenne}\\ &\leqslant \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t && |\sin|\leqslant 1 \quad\text{et}\quad n>1\end{aligned}$$

Or $\sqrt{n}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t=\sqrt{n}\left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}=\frac{\sqrt{n}}{n-1}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n-1}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{n-1}$

Comme $\pi<3$, $\dfrac{2}{\pi}\in[0,1[$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t=0$$

D'où, par majoration,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\,\mathrm{d}t=0$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{n}\,\mathrm{d}t=o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)}$$

b) i) Soit $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est $\mathscr{C}^1$ comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et

$$\forall t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\qquad f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\frac{g(t)}{t^2}$$

Avec $g(t)=t\cos t-\sin t$ du signe de $f'(t)$. *cf le cours de début d'année : on nomme, on dérive.*

Comme $g'(t)=\cos t-t\sin t-\cos t=-t\sin t\leqslant 0$ sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, le tableau de variations est :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	
$g(t)$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	0

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto\frac{\sin t}{t} \text{ est décroissante sur l'intervalle }]0,\frac{\pi}{2}]}$$

ii) *Ayons confiance en l'énoncé, et faisons comme d'habitude : montrer que $\sqrt{n} \times \int \cdots = o(1)$.*

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant 0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Soit n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \varepsilon_n < \dfrac{\pi}{2}$. Soit $n \geqslant n_0$: $\left[\varepsilon_n, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après ci-dessus, par décroissance de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\forall t \in \left[\varepsilon_n, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant \frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$$

Donc

$$\forall t \in \left[\varepsilon_n, \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \leqslant \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n$$

Et, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n \mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n$$

Montrons que $\sqrt{n}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_n\right)\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n \sim \dfrac{\pi}{2}\sqrt{n}\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n$ est de limite nulle.

Le passage à l'exponentiel doit être pavlovien, ici.

Effectuons un développement limité : d'après la question 1c, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$,

$\ln\left(\dfrac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right) = -\dfrac{\varepsilon_n^2}{3!} + o(\varepsilon_n^2)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n &= \sqrt{n}\ \exp\left(n \ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)\right) \\
&= \sqrt{n}\ \exp\left(n\Big(-\frac{\varepsilon_n^2}{3!} + o(\varepsilon_n^2)\Big)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\ln n\right)\exp\left(-\frac{\ln^2 n}{3!} + o(\ln^2 n)\right) \qquad\qquad \varepsilon_n^2 = \frac{\ln^2 n}{n} \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\ln n - \frac{\ln^2 n}{3!} + o(\ln^2 n)\right)
\end{aligned}$$

Or $\ln n = o(\ln^2 n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\ln n - \dfrac{\ln^2 n}{3!} + o(\ln^2 n)\right) = -\infty$. Par conséquent, en passant à l'exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)^n = 0$$

Puis, par majoration,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = 0$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)}$$

c) **i)** Posons, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $f(u) = 2u - 1 + e^{-u}$.
La fonction f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(u) = 2 - e^{-u} \qquad \text{et} \qquad f''(u) = e^{-u} > 0$$

Donc

u	0		$+\infty$
f'	1	$\nearrow$	
$f'(u)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	
$f(u)$	0	$+$	

De plus, sur $\mathbb{R}_+$, $e^{-u} \leqslant 1$. Conclusion :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant 1 - e^{-u} \leqslant 2u}$$

ii) D'après 1c,

$$\ln(g(t)) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4)$$

- <u>Montrons que $-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6}$</u> : Pour $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t^3}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right) = -\frac{t}{180} + o(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Écrivons la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$: il existe $b_1 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b_1]$,

$$\left|\frac{1}{t^3}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right)\right| \leqslant 1$$

c'est-à-dire,
$$-1 \leqslant \frac{1}{t^3}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right) \leqslant 1$$

Puis

$$-t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6}$$

- <u>Montrons que $\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$</u> : Pour $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t^4}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right) = -\frac{1}{180} + o(1) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{180}$$

Écrivons la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{180}$: il existe $b_2 > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b_2]$,

$$\left|\frac{1}{t^4}\left(\ln(g(t)) + \frac{t^2}{6}\right) + \frac{1}{180}\right| \leqslant \frac{1}{180}$$

D'où

$$\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0$$

Ainsi, avec $b = \min(b_1, b_2)$,

$$\boxed{\exists b > 0,\ \forall t \in]0, b], \qquad -t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0}$$

iii) Soit $t \in]0,b]$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
& -t^3 \leqslant \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leqslant 0 \\
\Longrightarrow & -nt^3 \leqslant n\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{nt^2}{6} \leqslant 0 \\
\Longrightarrow & \, e^{-nt^3} \leqslant e^{n\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)+\frac{nt^2}{6}} \leqslant e^0 = 1 \\
\Longrightarrow & \, e^{-nt^3} \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{\frac{nt^2}{6}} \leqslant 1 \\
\Longrightarrow & \, e^{-nt^3} - 1 \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{\frac{nt^2}{6}} - 1 \leqslant 0 \\
\Longrightarrow & \left(e^{-nt^3} - 1\right) e^{-\frac{nt^2}{6}} \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - e^{-\frac{nt^2}{6}} \leqslant 0 \qquad \text{Car } e^{-\frac{nt^2}{6}} > 0
\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant e^{-\frac{nt^2}{6}} \leqslant 1$ et $\left(e^{-nt^3} - 1\right) \leqslant 0$, donc en multipliant, il vient

$$e^{-nt^3} - 1 \leqslant \left(e^{-nt^3} - 1\right) e^{-n\frac{t^2}{6}}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in]0,b], \quad e^{-nt^3} - 1 \leqslant \left(e^{-nt^3} - 1\right) e^{-n\frac{t^2}{6}} \leqslant \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n - e^{-\frac{nt^2}{6}} \leqslant 0}$$

iv) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, pour n assez grand $\left]0, \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right] \subset]0,b]$ avec le b trouvé à la question précédente. Soit n assez grand.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t$ converge d'après 2)a).
En intégrant l'inégalité précédente (croissance de l'intégrale), il vient

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(e^{-nt^3} - 1\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \leqslant 0$$

D'où, comme $e^{-nt^3} \leqslant 1$,

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3})\,\mathrm{d}t}$$

De plus, d'après i), pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant 1 - e^{-u} \leqslant 2u$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \leqslant (1 - e^{-nt^3}) \leqslant 2nt^3$$

En intégrant sur $\left[0, \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right]$,

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3})\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} 2nt^3\,\mathrm{d}t = 2n\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} = 22\frac{\ln^4 n}{n}$$

Ainsi, d'après iii),

$$\boxed{\left|\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t\right| \leqslant 2\frac{\ln^4 n}{n}}$$

d) Le résultat de la question c)iv) peut s'écrire

$$\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t + O\left(\frac{\ln^4 n}{n}\right)$$

Or, d'après 1)e), $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Comme $\displaystyle\frac{\ln^4 n}{n} = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t + \underbrace{\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t}_{=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ car b)ii)}} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t}_{=o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ car a)}}\\ &= \sqrt{\frac{3\pi}{2n}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}}$$

Exercice 2 (E3A MP 2017)

1) **a)** La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. De plus, $f \geqslant 0$.

Étude en $+\infty$: Comme $\alpha > 0$,

$$f(t) \sim \frac{1}{t^{n\alpha}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n\alpha}} \mathrm{d}u$ converge (Riemann, $n\alpha > n \geqslant 1$). Donc, par théorème de comparaison,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Appliquons le théorème de changement de variable : La fonction $\varphi : u \mapsto \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($1/\alpha > 0$) et bijective de $]0,+\infty[$ dans lui-même.

D'après le théorème de changement de variable, les intégrales

$$I_n \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\varphi(u)^\alpha)^n}\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

sont de même nature. Or I_n converge d'après a), donc la seconde aussi.

De plus, comme, pour tout $u > 0$, $\varphi'(u) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$,

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(u)}{(1+\varphi(u)^\alpha)^n} \mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \mathrm{d}u\end{aligned}$$

Ici les bornes ne changent pas. Mais il faut vérifier plutot 2 fois qu'une !

En conclusion,

$$\boxed{\text{L'application } f_n : u \longmapsto \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{ et } I_n = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,du}$$

c) *On peut aussi étudier $g(u) = \left(1+\frac{u}{n}\right)^n - 1 - u$, en dérivant jusqu'à disparition du $-(1+u)$, et on trouve le résultat.*
Le $(a+b)^n$ peut faire penser au binôme de Newton, et c'est ce que nous allons utiliser ici. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geqslant 0$. D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{u}{n}\right)^k \\ &= 1 + n\frac{u}{n} + \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{u}{n}\right)^k}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant 1 + u \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0, \quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u}$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geqslant 0$. Comme $\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u > 0$, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
(non, la fonction inverse n'est pas « décroissante » tout court, cf le graphe de $y = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$)

$$\frac{1}{(1+\frac{u}{n})^n} \leqslant \frac{1}{1+u}$$

Or $u^{\frac{1}{\alpha}-1} \geqslant 0$, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \geqslant 0, \quad f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}}$$

2) Question de cours.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u}$$

3) **a)** Soit $u \in]0,+\infty[$ fixé.
D'après la question 2), $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n = e^u$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{e^u} = u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}$.
Conclusion :

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simplement vers } f : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ \quad u \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u} \end{cases}}$$

b) Appliquons le théorème de convergence dominée.
Posons

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad \varphi(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$$

Montrons que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $\mathbb{R}_+^*$) : elle est positive et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, et en $+\infty$

$$\varphi(u) \sim \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}$$

Or $0 < 1 < \alpha$, donc $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ et donc $2 - \frac{1}{\alpha} > 2 - 1 = 1$.
Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}\,du$ est convergente (Riemann, $2 - \frac{1}{\alpha} > 1$), et par théorème de comparaison,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u)\,\mathrm{d}u \text{ converge.}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et f sont continues donc continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après a), (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Hypothèse de domination : $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est intégrable d'après ci-dessus et, de plus, d'après 1)d),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant f_n(u) \leqslant \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, pour tout n f et f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$$

En remplaçant, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

c) D'après 1)b), $I_n = \dfrac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} v_n$. Or $\Gamma(1/\alpha) \neq 0$, donc $v_n \sim \Gamma(1/\alpha)$. Conclusion :

$$\boxed{I_n \sim \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

FIN DE L'ÉPREUVE