Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (D'après PT C, 2008 et 2015)

1) Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé.

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \\ &= e^{-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-t^2 + o(1)} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t) = e^{-t^2}$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ convergence simplement vers } f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-t^2} \end{array} \right. \text{ sur l'intervalle } [0, +\infty[.}$$

2) Soit $t \in [0, +\infty[$, et $n \in \mathbb{N}^*$. La formule du binôme s'écrit :

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t^2}{n}\right)^k$$

Or tous les termes de la somme sont positifs, et en ne gardant que les deux premiers on trouve

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geqslant \binom{n}{0} \left(\frac{t^2}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{t^2}{n}\right)^1 = 1 + t^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geqslant 1 + t^2}$$

3) *La théorème de convergence dominée, en majorant $\left|\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}\right|$ par $\varphi(t)$, nous donnera aussi la convergence de cette intégrale.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas donc continue (donc continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$. De plus $f_n \geqslant 0$ *(Soit de la convergence absolue, soit préciser que la fonction est positive.)*

Étude en $+\infty$:

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \sim \left(\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = \frac{n^n}{t^{2n}}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}}\, \mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2n \geqslant 2 > 1$), donc par comparaison,

$$\boxed{u_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

4) *On cherche au brouillon, puis on rédige au propre « dans l'ordre ». On ne se lance pas directement sur la copie. Il s'agit d'une intégrale généralisée, donc forcément du théorème de convergence dominée.*

Préliminaires : Soit $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

La fonction φ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

De plus, $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison,

$$\varphi \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[.$$

D'autre part, en passant à l'inverse dans l'inégalité du 2 (tout est strictement positif),

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Théorème de convergence dominée :

- La suite (f_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers f continue par morceaux d'après 1.
- D'après ci-dessus, $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et vérifie (d'après 2),

$$\forall t \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \varphi(t)$$

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n et f sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Préliminaires : Soit $\varphi : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0,+\infty[$ définie par $\varphi(u) = \sqrt{n}\dfrac{\cos u}{\sin u}$.

La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi' = \dfrac{\sqrt{n}}{\sin^2} > 0$, donc strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc bijective.

Théorème de changement de variable :

Comme $\varphi : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0,+\infty[$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective, le théorème de changement de variable nous dit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Or la première intégrale converge, donc la seconde aussi. De plus,

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Or pour tout $u \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}
f_n(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u &= \left(1+\frac{(\sqrt{n}\frac{\cos u}{\sin u})^2}{n}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \left(1+\frac{n\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}}{n}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \left(\frac{\sin^2 u+\cos^2 u}{\sin^2 u}\right)^{-n}\frac{\sqrt{n}}{\sin^2(u)}\\
&= \sqrt{n}\sin^{2n}\frac{1}{\sin^2(u)}\\
&= \sqrt{n}\sin^{2n-2}
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,\mathrm{d}u}$$

Les intégrales de Wallis, de nouveau.

6) D'après l'énoncé – et un sujet précédent –, lorsque N tends vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^N u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$.
Donc, avec $N = 2n-2$, lorsque $n \to +\infty$,

$$u_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-2}u\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc, d'après 4,

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

De plus, par parité de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$, l'intégrale J converge [1] et

$$\boxed{J = 2I = \sqrt{\pi}}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t/\sqrt{2}$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de changement de variable la convergence de I entraîne celle de K et

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est la fonction gaussienne, qui la densité de probabilité de la loi normale, au scalaire J près (pour que $P(\Omega) = 1$).

Exercice 2 (EPITA, 2006 – extraits)

Partie 1 (Existence des deux intégrales C et S.)

1) a) Le changement de variable $\varphi : t \mapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissant et bijectif de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de changement de variable, les intégrales avant et après changement de variable sont de même nature et en cas de convergence,

$$\boxed{C = \int_0^{+\infty}\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad S = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$$

1. Toujours vérifier la convergence d'une intégrale généralisée avant de faire un calcul.

Si la question avait été de la forme « Montrer que $C = \dots$ et $S = \dots$ », il aurait fallu détailler.

b) *Cette question a dû vous rappeler, à raison, une question de cours.*

La fonction $f : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0 : $f(u) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ qui est intégrable d'après Riemann ($1/2 < 1$), donc f l'est aussi.

Étude en $+\infty$: Soit $X \geqslant 1$. Effectuons une intégration par partie.

$$\int_1^X \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\sin(X)}{2\sqrt{X}} = 0$ et $\left|\dfrac{\sin(u)}{4u^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{4u^{3/2}}$ intégrable d'après Riemann ($3/2 > 1$).

En conclusion, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ existe, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } C \text{ converge.}}$$

Le raisonnement est identique pour S : La fonction $g : u \mapsto \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0 : $g(u) \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{u}$ donc g est prolongeable en 0 donc intégrable.

Étude en $+\infty$: Soit $X \geqslant 1$. Effectuons une intégration par partie.

$$\int_1^X \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos(u)}{4u^{3/2}}\,\mathrm{d}u$$

Et on conclue de la même façon.

$$\boxed{\text{L'intégrale } S \text{ converge.}}$$

2) Deuxième méthode.

a) $f(x) = \dfrac{e^{ix^2} - 1}{x^2} = \dfrac{1 + ix^2 + o(x^2) - 1}{x^2} = i + o(1)$. *(DL à l'ordre 1 de e^u en 0 avec $u = ix^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$)*

Donc

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en 0 par } f(0) = i.}$$

b) La fonction f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0 : Elle est prolongeable en 0 d'après a), donc intégrable au voisinage de 0.

Étude en $+\infty$: $|f(x)| \leqslant \dfrac{|e^{ix^2}| + 1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}$, qui est intégrable d'après Riemann ($2 > 1$), donc f intégrable au voisinage de $+\infty$.

(Attention : jamais d'inégalité dans $\mathbb{C}$. Prendre le module, qui nous ramène dans $\mathbb{R}$. Appliquer l'inégalité triangulaire : ne pas cherche à faire dans la finesse.)

En conclusion,

$$\boxed{\text{l'intégrale } I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument donc converge.}}$$

c) *Ici, on nous donne la formule, il faut donc détailler. Cherchez au brouillon, vérifiez vos primitives, puis rédigez au propre en énonçant le théorème de changement de variable.*

Soit $x > 0$. Posons $\begin{cases} u(t) &= -\dfrac{1}{t} \\ v(t) &= e^{it^2} - 1 \end{cases}$, et donc $\begin{cases} u'(t) &= \dfrac{1}{t^2} \\ v'(t) &= 2ite^{it^2} \end{cases}$.

- En 0, $u(t)v(t) \sim -\dfrac{it^2}{t} = it$ donc $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t)$ existe et vaut 0.
- En x, u et v sont définies et continues.

Donc, d'après le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et

$$\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = [uv]_0^x - \int_0^x -\frac{2ite^{it^2}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{ix^2}}{x} + 2i\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion :

$$\boxed{\lambda = 2i}$$

d) D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\left(\int_0^x \frac{e^{it^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1-e^{ix^2}}{x}\right)$

Le terme de droite a une limite lorsque $x \to +\infty$ car f est intégrable (d'après la question 2)b)) et $\left|\dfrac{1-e^{ix^2}}{x}\right| \leqslant \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc

$$\boxed{\text{L'intégrale } E \text{ converge.}}$$

De plus, $C = \mathrm{Re}\,(E)$ et $S = \mathrm{Im}\,(E)$, donc, par continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire,

$$\boxed{C \text{ et } S \text{ convergent.}}$$

Partie 2 (Calcul des deux intégrales C et S.)

1) a) *(Question du type « Montrer que », il faut un minimum détailler, et ne pas se contenter de recopier l'énoncé)*

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés :

$$\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| = \frac{\left|e^{-x^2t^2}e^{ix^2}\right|}{|t^2-i|} = \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{(t^2)^2+1^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$$

Car $\left|e^{i\theta}\right| = 1$; et $-(xt)^2 \leqslant 0$ donc $e^{-(xt)^2} \leqslant 1$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue par morceau sur $\mathbb{R}$, et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Or $\left|\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sim \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable d'après Riemann ($2 > 1$) donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ l'est aussi, puis $\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ par majoration.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x)$ converge absolument donc converge, ce qui signifie que $\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

b)
- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ (1)a)) et d'après 1)a)

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{F \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

c) Soit $x > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right| = \frac{e^{-(xt)^2}}{\sqrt{(t^2)^2+1^2}} \leqslant e^{-(xt)^2}$$

Car $1+t^4 \geqslant 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant 1$.

Comme $t^2 e^{-(xt)^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$, à partir d'un certain $\pm t_0$ on a $0 \leqslant e^{-(xt)^2} \leqslant \dfrac{1}{t}^2$, donc $t \mapsto e^{-(xt)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En intégrant entre $-\infty$ et $+\infty$ il vient $|F(x)| \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

L'application $t \mapsto xt$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme car $x \neq 0$. Le changement de variable $u = xt$ ne change pas les bornes ($x > 0$) donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}J = \frac{\sqrt{\pi}}{x}$$

Comme $\dfrac{\sqrt{\pi}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par encadrement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

De plus F est paire, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$

2) **a)** Soit $0 < a < b$, on considère le segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Soit $h(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après 1)a)) ;
  la fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(t^2-i)}$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
- Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = 2be^{-a^2t^2}$. La fonction φ est **intégrable sur** $\mathbb{R}$ (1)c)) et

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}, \qquad \left|-2xe^{-x^2(t^2-i)}\right| = 2|x|e^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \varphi(t)$$

  Car $|x| = x \leqslant b$, puis $x \mapsto e^{-x^2t^2}$ est décroissante sur $[a,b]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient $\boxed{F \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,b] \text{ et } F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t.}$

Trouver avant *la fonction φ, en essayant de majorer, au brouillon (*cf.* les techniques de majoration revues en début d'année), puis rédiger comme je l'ai fait. Tout se passe sur $[a,b]$.*

Par conséquent F est $\mathscr{C}^1$ sur $\bigcup\limits_{0<a<b} [a,b] = \mathbb{R}_+^*$, puis par parité sur $\mathbb{R}^*$. L'expression de F' est valable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par parité sur $\mathbb{R}^*$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le calcul effectué en 3)c) (valable sur $\mathbb{R}_+^*$),

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\,\mathrm{d}t = -2xe^{ix^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = -2e^{ix^2}\sqrt{\pi}$$

Le résultat reste vrai sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité. Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}}$

$$\forall x > 0 \qquad F(0) - F(x) = -\int_0^x F'(X)\mathrm{d}X = 2\sqrt{\pi}\int_0^x e^{iX^2}\mathrm{d}X$$

c) **i)** La question de la convergence a été réglée au 1)a). La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ donc on pose le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{u^2}}{1+\frac{1}{u^4}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

ii) Par parité, $F(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2+i}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$. Donc il vient

$$F(0) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t + 2i\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = 2(1+i)\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = (1+i)\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

d) D'après 2)d), $\displaystyle\int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(F(0) - F(x))$, et d'après 1)c), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, donc

$$E = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{it^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)$$

Par conséquent, $\boxed{C = \mathrm{Re}\,(E) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \text{ et } S = \mathrm{Im}\,(E) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 3 (E3A PC 2013)

Partie 1

1) Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, $\mathrm{ch}\,(t) = \dfrac{e^t + o(1)}{2}$ et $\mathrm{sh}\,(t) = \dfrac{e^t - o(1)}{2}$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{ch}\,(t) \sim \frac{e^t}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\,(t) \sim \frac{e^t}{2}}$$

2) Les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur cet intervalle.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad g_1'(t) = -\frac{\mathrm{sh}\,(t)}{\mathrm{ch}^{\,2}(t)} \qquad \text{et} \qquad g_2'(t) = \frac{\mathrm{sh}\,(t) - t\,\mathrm{ch}\,(t)}{\mathrm{sh}^{\,2}(t)}$$

- Étude de g_1 : Comme sh est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$,

t	0	$+\infty$
$g_1'(t)$	‖	$-$
g_1	‖	$1 \searrow 0$

- $\displaystyle\lim_{t\to 0} g_1(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(0)} = 1$
- $g_1(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

- Étude de g_2 : *On veut le signe de $g_2'(t)$, donc celui de $\mathrm{sh}\,(t) - t\,\mathrm{ch}\,(t)$. Le résultat n'est pas immédiat : on ne s'acharne pas, on donne un nom à l'expression et on étudie la fonction. Cf le cours de début d'année.*
Soit $h(t) = \mathrm{sh}\,(t) - t\,\mathrm{ch}\,(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $h'(t) = \mathrm{ch}\,(t) - [\mathrm{ch}\,(t) + t\,\mathrm{sh}\,(t)] = -t\,\mathrm{sh}\,(t) < 0$, la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, $h(0) = 0$. D'où l'on déduit que $h < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

t	0		$+\infty$
$h'(t)$	0	$-$	
h	0	$\searrow$	
$h(t)$	0	$-$	
$g_2'(t)$	$\Vert$	$-$	
g_2	$\Vert$ 1	$\searrow$	0

- $g_2(t) \sim_0 \dfrac{t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} g_2(t) = 1$
- $g_2(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{e^t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
  par croissance comparée.

Partie 2

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. La fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$: Par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t} = 0$, donc

$$f_n(t) = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge, donc, par comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.
Conclusion,

$$\boxed{I_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties : le crochet a une limite finie en $+\infty$ par croissance comparée.

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[t^{n+1}(-e^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = (n+1)I_n$$

Conclusion

$$\boxed{I_{n+1} = (n+1)I_n}$$

c) $I_0 = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = n!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $I_0 = 1 = 0!$ d'après ci-dessus.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après b),

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I_n = n!}$

d) Effectuons le changement de variable $u = \alpha t$. La fonction $\varphi(t) = \alpha t$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante ($\alpha > 0$) et bijective de $[0, +\infty[$ dans lui-même.
Donc, d'après le théorème de changement de variable, $int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}$ dt et $\dfrac{1}{\alpha^{n+1}} int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u}$ du sont de meme nature – donc convergentes d'après a) – et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^{n+1}} I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}}$$

2) **a)** Soit $t \geqslant 0$.

$$\frac{e^t}{2} - \operatorname{ch}(t) = \frac{e^t - (e^t + e^{-t})}{2} = -\frac{e^{-t}}{2} < 0$$

Et, comme $\operatorname{sh}(t) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\operatorname{ch}(t) - e^t = \frac{e^t + e^{-t} - 2e^t}{2} = -\operatorname{sh}(t) \leqslant 0$$

Finalement,

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad \frac{\mathrm{e}^t}{2} \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^t}$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{\operatorname{ch}(t)}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
Comme tout est strictement positif dans l'encadrement précédent, on peut passer à l'inverse :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \frac{1}{\mathrm{e}^t} \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}^t}$$

Puis, en multipliant par $t^n \geqslant 0$,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant t^n e^{-t} \leqslant \frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)} \leqslant 2t^n \mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi, comme $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge d'après 1)a), par majoration la fonction *positive* $t \mapsto \dfrac{t^n}{\operatorname{ch}(t)}$ est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$:

$$\boxed{C_n \text{ existe}}$$

De plus, en intégrant l'encadrement obtenu, il vient

$$\boxed{1 \leqslant \frac{C_n}{I_n} \leqslant 2}$$

c) Soit $g(t) = \operatorname{Arctan}(e^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g'(t) = \frac{e^t}{1 + e^{2t}} = \frac{1}{e^{-t} + e^t} = \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)}$$

Ainsi, $C_0 = \Big[2\operatorname{Arctan}(e^t)\Big]_0^{+\infty} = 2\Big(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$. Conclusion :

$$\boxed{C_0 = \pi}$$

d) Soit $t > 0$.

$$\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} = \frac{1}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}}$$

Or, comme $t > 0$, $q = -e^{-2t} \in]-1, 1[$ et nous avons une série géométrique convergente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 + e^{-2t}}$$

D'où

$$\frac{e^{-t}}{1 - e^{-2t}} = e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-2kt}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)t}}$$

Dans le membre de droite on reconnaît une série géométrique de raison $q = -e^{-2t}$. On cherche au brouillon, on rédige au propre.

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, posons

$$\forall t \in]0, +\infty[\qquad f_k(t) = 2(-1)^k t^n e^{-(2k+1)t}$$

D'après 1)d), avec $\alpha = 2k+1 > 0$, f_k est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$u_k = \int_0^{+\infty} |f_k(t)| \, \mathrm{d}t = 2 \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t} \, \mathrm{d}t = \frac{2(n!)}{(2k+1)^{n+1}}$$

Ainsi, $u_k \sim \dfrac{2(n!)}{2^{n+1}} \times \dfrac{1}{k^{n+1}}$ (rappel : n fixé). Or $\sum\limits_k \dfrac{1}{k^{n+1}}$ converge (Riemann, $\alpha = n+1 \geqslant 2 > 1$).
Donc, par comparaison, $\sum\limits_k u_k$ converge.
Théorème d'intégration terme à terme :

- $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- D'après d), $\sum f_k$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{2t^n}{2\,\mathrm{ch}\,(t)} = \dfrac{t^n}{\mathrm{ch}\,(t)}$, qui est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- D'après le calcul ci-dessus, $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k(t)| \, \mathrm{d}t$ converge.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t) \, \mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_k(t) \, \mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k(t) \, \mathrm{d}t = \frac{2(n!)(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$ d'après ci-dessus, donc finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

a) La fonction $S : \left\{ \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^n}{\mathrm{sh}\,(t)} \end{array} \right.$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

Étude en 0 : $S(t) \sim \dfrac{t^n}{t} = t^{n-1}$. Or $n \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{t \to 0} S(t) = 1$ si $n = 1$ et 0 si $n \geqslant 2$.
Ainsi, S est prolongeable par continuité en $t = 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 S(t) \, \mathrm{d}t$ converge.
Étude en $+\infty$: $t^2 S(t) = \dfrac{2t^{n+2}}{e^t - e^{-t}} \sim \dfrac{2t^{n+2}}{e^t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée.
Donc $S(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, \mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(t) \, \mathrm{d}t$ converge.
Conclusion :

$$\boxed{S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{sh}\,(t)} \, \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) De même qu'au 2)d), on reconnaît une série géométrique. Soit $t > 0$.

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(t)} = \frac{1}{e^t - e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}}$$

Or, comme $t > 0$, $q = e^{-2t} \in]-1, 1[$ et nous avons une série géométrique convergente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-2t}}$$

D'où

$$\frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}} = e^{-t} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kt}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)t}}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. De même qu'au 2)e), on applique le théorème d'intégration terme à terme. On rappelle les notations du 2)e) :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0, +\infty[, \qquad |f_k(t)| = 2t^n e^{-(2k+1)t}$$

Théorème d'intégration terme à terme :

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_k|$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- D'après b), $\sum |f_k|$ converge simplement vers $S : t \mapsto \dfrac{2t^n}{2\,\mathrm{sh}\,(t)} = \dfrac{t^n}{\mathrm{sh}\,(t)}$, qui est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- D'après le calcul ci-dessus, $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{2(n!)}{(2k+1)^{n+1}}$ d'après ci-dessus 2)e) ($|f_k| = (-1)^k f_k$), donc finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}}$$

4) D'après 3)c), $S_1 = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Notons $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
Comme $\mathbb{N}^* = \{2k \mid k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} S_1\end{aligned}$$

D'où $\zeta(2) = \dfrac{1}{4}\zeta(2) + \dfrac{1}{2}S_1$. En conclusion,

$$\boxed{S_1 = \frac{3}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{4}}$$

Exercice 4 (d'après PT C 2018)

Partie 1 (Préambule)

Vous aurez reconnu l'exercice sur le lemme de Lebesgue, vu en TD.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{k}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k} = 0$, donc, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t &= \left[f(t)\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\mathrm{e}^{ikt}}{ik}\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\frac{e^{ikb}}{ik} - f(a)\frac{e^{ika}}{ik} - \frac{1}{ik}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(b)|}{k} + \frac{f(a)}{k} + \frac{1}{k}\left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après a), $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0$, donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0}$$

Partie 2

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

La fonction $f_n : \left\{\begin{array}{ccc}]0,\pi/2[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin(2nt)}{\tan t}\end{array}\right.$ est continue donc continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.

<u>Étude en 0</u> : $f_n(t) \sim \dfrac{2nt}{t} = 2n$ ($\neq 0$ car $n \geqslant 1$). Donc $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 2n$ et f_n est prolongeable par continuité en $t = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Étude en $\frac{\pi}{2}$</u> : Soit $t = \dfrac{\pi}{2} - h$.

$$\begin{aligned}f_n\left(\frac{\pi}{2} - h\right) &= \frac{\sin(n\pi - 2nh)}{\tan(\pi/2 - h)} \\ &= (-1)^{n+1}\sin(2nh)\frac{\sin(h)}{\cos(h)} \xrightarrow[h\to 0]{} 0\end{aligned}$$

Donc f_n est aussi prolongeable par continuité en $t = \dfrac{\pi}{2}$, et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

b) Calculons I_1 : pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2t)}{\tan t} &= \frac{\sin(2t)\cos t}{\sin t}\\ &= \frac{2\sin t\cos^2 t}{\sin t}\\ &= 2\cos^2 t\\ &= \cos(2t)+1\end{aligned}$$

Donc $I_1 = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

c) Si l'on note $\mathcal{I}m\,(z)$ la partie imaginaire d'un complexe z, on a :

$$\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = \mathcal{I}m\left(\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t}\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2(n+1)\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}t} &= \mathrm{e}^{(2n+1)\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\\ &= 2\left(-\sin\left((2n+1)\,t\right)\sin t + \mathrm{i}\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t\right)\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sin\left((2n+2)\,t\right) - \sin\left(2nt\right) = 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\sin t.}$$

d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Mais par un calcul analogue au précédent :

$$2\cos\left((2n+1)\,t\right)\cos t = \cos\left((2n+2)\,t\right) + \cos\left(2nt\right)$$

donc, comme $2n \neq 0$ et $2n+1 \neq 0$,

$$I_{n+1} - I_n = \left[\frac{\sin\left((2n+2)\,t\right)}{2\,(n+1)} + \frac{\sin\left(2nt\right)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

ce qui prouve que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
Avec la question (b), on peut conclure que

$$\boxed{\text{la suite de terme général } I_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ est constante égale à } \pi/2.}$$

2) Pour p entier naturel non nul, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(pt)}{t}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas, et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur p.
L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(pt)}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente, car faussement généralisée.
C'est vrai notamment pour $p = 2n$ avec n entier naturel non nul ou pour $p = 1$.

$$\boxed{\text{Les intégrales considérées sont convergentes.}}$$

3) Comme différence de telles fonctions, φ est de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Prolongement par continuité :

- En $\frac{\pi}{2}$: Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos t}{\sin t}$.

  Donc $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \varphi(t) = \frac{2}{\pi}$: φ se prolonge par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec la valeur $\frac{2}{\pi}$.

- En 0 : pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi(t) = \frac{\tan t - t}{t \tan t} = \frac{t + \frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right) - t}{t \tan t} = \frac{\frac{t^3}{3} + \mathrm{o}\left(t^3\right)}{t \tan t}$$

Ainsi $\varphi(t) \sim \dfrac{\frac{t^3}{3}}{t}^2 = \dfrac{t}{3} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$: φ se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 0.

La fonction φ se prolonge en une fonction $\widetilde{\varphi}$ continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

<u>Caractère $\mathscr{C}^1$</u> : Nous allons appliquer à $\widetilde{\varphi}$ le théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$ en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\widetilde{\varphi}'\left(t\right) = \frac{-1}{t^2} + \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2}.$$

- En $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}'\left(t\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

- En 0 : $(t - \tan t) \sim -\dfrac{t^3}{3}$ et $(t + \tan t) \sim 2t$ donc

$$\frac{1}{\tan^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{\left(t - \tan t\right)\left(t + \tan t\right)}{t^2 \tan^2 t} \sim \frac{-\frac{t^3}{3} \times 2t}{t^4} = \frac{-2}{3}$$

  donc

$$\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi}'\left(t\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué en $a = 0$ et $a = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\boxed{\text{Le prolongement } \widetilde{\varphi} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

4) Puisque $\widetilde{\varphi}$ est C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, il découle du préambule que la suite de terme général

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}\left(t\right) \mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t$$

converge vers 0, et la suite extraite $\left(\alpha_{2n}\right)_n$ également. Il est en de même de la suite de terme général $\left(\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right)$ car $0 \leqslant \left|\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right)\right| \leqslant \left|\alpha_{2n}\right|$. Or

$$\mathcal{I}m\left(\alpha_{2n}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \widetilde{\varphi}\left(t\right) \sin\left(2nt\right)\,\mathrm{d}t = J_n - I_n$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(J_n - I_n\right) = 0.}$$

5) **a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ étant continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Elle est égale à

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u\left(t\right) v'\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

où les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos t$ sont C^1 sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right[$ et telles que le produit uv admette des limites finies (nulles) aux bornes de l'intervalle d'intégration. L'intégrale a donc, d'après le théorème d'intégration par parties, même nature que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} u'(t)\, v(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Elle est donc convergente, car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ donc pour $\alpha = 2$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

b) La fonction $t \mapsto u = 2nt$ est une bijection C^1 strictement croissante de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $]0, n\pi]$, donc par théorème de changement de variable :

$$J_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est convergente, par composition de limites, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t}$$

c) D'après la question 1.(d), on peut écrire :

$$J_n = I_n + (J_n - I_n) = \frac{\pi}{2} + (J_n - I_n)$$

donc, d'après les questions 4 et 5.(b) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE