Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Pour tout $t \in [0, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

1) Déterminer la limite f de la suite (f_n) pour la convergence simple sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geqslant 1 + t^2$$

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ converge.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan x}$. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n} \operatorname{cotan} u$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} u \, \mathrm{d}u$.

6) En utilisant le fait que, lorsque N tends vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^N u \, \mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2N}}$, en déduire la valeur des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

Exercice 2

On se propose de prouver l'existence des deux intégrales suivantes (de Fresnel, 1788 - 1827) :

$$C = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) \, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad S = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) \, \mathrm{d}t$$

puis de les calculer. On utilisera aussi l'intégrale $E = C + iS = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2} \mathrm{d}t$, et on rappelle que l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ d'après l'exercice précédent.

1) Première méthode : Effectuer le changement de variable $u = t^2$ dans chacune des intégrales.

a) Donner les nouvelles expression de C et S.

b) Prouver la convergence des deux intégrales C et S.

2) Deuxième méthode.

a) On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{ix^2} - 1}{x^2}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On précisera la valeur en 0.

b) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\, dt$.

c) À l'aide d'une intégration par partie, déterminer le complexe λ tel que

$$\forall x > 0 \qquad \int_0^x \frac{e^{it^2} - 1}{t^2}\, dt = \frac{1 - e^{ix^2}}{x} + \lambda \int_0^x e^{it^2}\, dt$$

d) En déduire l'existence de l'intégrale E, et donc des intégrales C et S.

Exercice 3

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\mathrm{ch}\,(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \quad \mathrm{sh}\,(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

1) **a)** Justifier l'existence de : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

c) Calculer I_0. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha > 0$, la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt$.

2) **a)** Justifier que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2} \leqslant \mathrm{ch}\,(t) \leqslant \mathrm{e}^t$.

b) En déduire l'existence de $C_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{ch}\,(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un encadrement du rapport $\dfrac{C_n}{I_n}$.

c) Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $t \mapsto \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{e}^t)$, calculer C_0.

d) Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}\,(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)t}$.

e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = 2(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}$.

On énoncera et on appliquera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

3) **a)** Montrer l'existence de : $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{sh}\,(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(2k+1)t}$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}$.

4) On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de S_1.

Exercice 4

Partie 1 (Préambule)
On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty,\, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,t}\mathrm{d}t$.

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Partie 2
Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{\tan t}\,\mathrm{d}t \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1) **a)** Étudier, pour tout entier naturel non nul n, la convergence de l'intégrale I_n.

b) Déterminer I_1.

c) Exprimer, pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et tout entier naturel non nul n, la quantité :

$$\sin((2n+2)\,t) - \sin(2nt)$$

en fonction de $\cos((2n+1)\,t)$ et $\sin t$.

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la valeur prise par les termes de cette suite).

2) Étudier la convergence des intégrales J_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) Montrer que la fonction φ qui, à tout réel t de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, associe

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\tan t}$$

est prolongeable en une fonction $\widetilde{\varphi}$ de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4) Que vaut : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(J_n - I_n)$? On pensera à utiliser le préambule.

5) **a)** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(on pourra utiliser un changement de variable).

c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

FIN DE L'ÉPREUVE