Épreuve de Mathématiques 3

$\boxed{\text{Correction}}$

4

Exercice 1 (E3A PC, B 2010)

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre s'écrit

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos(x) + i\sin(x))^3 = \cos^3(x) + 3i\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) - i\sin^3(x)$$

Donc l'égalité des parties imaginaire s'écrit

$$\boxed{\sin(3x) = 3\sin(x)(1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)}$$

b) i) Au voisinage de 0, $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + o(x) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + o(x)$$

Donc $\lim\limits_{0} f = 0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$

ii) La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe C^1.

En $x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}$ d'après le développement limité effectué au 1b.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x) + x}{x^3} = \frac{x - x^3/2 - 2x + x^3/3 + x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

et $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ *(on peut aussi appliquer le théorème de prolongation $\mathscr{C}^1$: f et f' ont une limite en 0)*

2) a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, $\dfrac{\sin^3(x)}{x^2} \sim x$, la fonction est prolongeable par continuité donc intégrable.
- Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin^3(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable (Riemann), donc la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{I \text{ existe}}$

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

i)
- Les deux fonctions sont continues sur $[a, +\infty[$ et $[3a, +\infty[$.
  Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin(3x)}{x^2}\right|$ et $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right|$ sont majorée par $\dfrac{1}{x^2}$, qui est intégrable. Donc $\boxed{\text{ces deux intégrales converges}}$.
- Le changement de variable $u = 3x$ dans la première intégrale nous donne

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2/9}\frac{\mathrm{d}u}{3} = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x}$$

ii) L'intégrale $I(a)$ converge (voir 2)a)). D'après 1a, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, d'après ci-dessus,

$$4I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{3a} \varphi(x) + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(3)$ donc

$$\boxed{I(a) = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{3\ln(3)}{4}}$$

iii) Notons Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est définie et continue en $x = 0$.

$$I = \lim_{a\to 0} I(a) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{4}(\Phi(3a) - \Phi(a)) + \frac{3\ln(3)}{4}\right) = \frac{3\ln(3)}{4}$$

Exercice 2 (PT 2016)

1) Pour tout réel x,

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + \mu = (x+\lambda)^2 - \lambda^2 + \mu$$

Posons $\alpha = \mu - \lambda^2 > 0$ et $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu - \lambda^2}}$. Alors

$$x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}(x+\lambda)^2 + 1\right) = \alpha\Big(1 + \beta^2(x+\lambda)^2\Big)$$

En conclusion, $\boxed{\alpha = \mu - \lambda^2 \text{ et } \beta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}} \text{ vérifient } x^2 + 2\lambda x + \mu = \alpha\Big(1+\beta^2(x+\lambda)^2\Big)}$

2) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 + 2\lambda x + \mu)^{n+1}}$.

Comme le discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\mu < 0$ par hypothèse, $x^2 + 2\lambda x + \mu$ ne s'annule jamais et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

<u>Étude en $-\infty$</u> : De même, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n \geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^{2n+2}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n+2}}\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha = 2n+2 \geqslant 2 > 1$).

Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

En conclusion, $\boxed{I_n \text{ converge}}$

<u>Calcul de I_0</u> : $\dfrac{1}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2}$ d'après 1), avec $\alpha = \dfrac{1}{\beta^2}$. Donc

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2\lambda x + \mu} = \beta\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{1 + \Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2} = \beta\Big[\mathrm{Arctan}\,\Big(\beta(x+\lambda)\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \beta\pi$$

Conclusion : $\boxed{I_0 = \beta\pi}$

3) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u = x$ et $v = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$. Comme $uv \sim_\infty \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ avec $2n-1>0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty} uv = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} uv = 0$$

D'où l'intégration par partie suivante :

$$I_{n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)^n} - \dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, donc

$$I_{n-1} = 2n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

Par conséquent, $\boxed{I_n = \dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}}$

b) *Cherchez au brouillon pour les premiers termes, comme d'habitude. Une fois que vous avez une formule bien propre, comme vous l'avez obtenu avec des « ... », il faut faire une récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: d'après 2), $I_0 = \beta\pi$, et ici $\beta = 1$. Ainsi $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\pi = \pi = I_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après a),

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n = \frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\,\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\pi$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi}$

Pour compléter un peu les résultats de l'exercice, et confirmer votre impression de « déjà vu », on peut effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans I_n.
Comme $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $(1+x^2)^{n+1} = (1+\tan^2 t)^{n+1} = (1/\cos^2 t)^{n+1}$, on trouve

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2W_{2n}$$

Wallis !

Exercice 3 (D'après E3A MP 2014)

1) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x) + x^n(-1/2)}{(\sqrt{1+x})^3} = \frac{(n + x(n-1/2))x^{n-1}}{(\sqrt{1+x})^3} \geqslant 0$$

Les tableaux de variations sont, pour $n \geqslant 2$ et $n = 1$,

x	0	1
$f_n'(x)$	0	$+$
f_n	$0 \nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

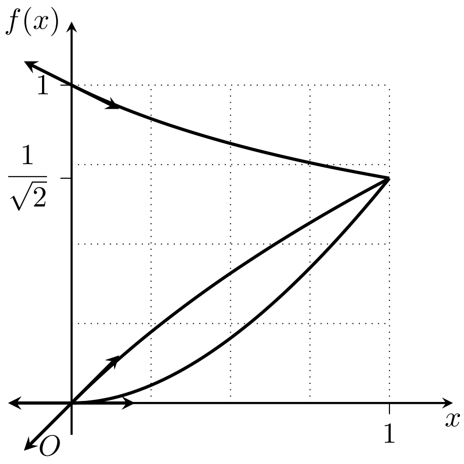
x	0	1
$f_1'(x)$	1	$+$
f_1	$0 \nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Pas une erreur à cette étape : $f_n(x) = x^n(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

Cas $n = 0$: La fonction f_0 est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, $f_0'(x) = -\dfrac{1}{2(\sqrt{1+x})^3} < 0$.

x	0	1
$f_0'(x)$	-1/2 $\quad -$	
f_0	$1 \searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Tracé : avoir la valeur de la tangente en $x = 0$ et $x = 1$ donne une idée de la courbe.



c) Soit $x \in [0,1[$ fixé. $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

Soit $x = 1$, $f_n(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers } f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ définie par } \quad \forall x \in [0,1[, \quad f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

d) Cas $[0,1]$: Si (f_n) convergeait uniformément sur $[0,1]$, comme les f_n sont continues sur $[0,1]$, d'après le théorème de continuité, on devrait avoir f continue sur $[0,1]$.

Or $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0 \neq f(1)$, donc f n'est pas continue sur $[0,1]$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,1]}$$

Cas $[0,A]$: D'après le tableau de variation du a),

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \|f_n - f\|_\infty^{[0,A]} = |f_n(A)|$$

Or d'après c) (convergence simple en $x = A$), $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(A) = 0$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n) \text{ converge uniformément sur } [0,A]}$$

2) **a)** Théorème de convergence dominée :

- La suite de fonction (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$ d'après 1)c).
  Autant faire bien les choses : on converge sur un intervalle I, et on précise d'après la question 35.
- Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
- Soit $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = f_0(x)$. La fonction φ est continue donc intégrable sur le segment $[0,1]$. De plus,

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varphi(x)$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$$

b) Sur le segment *(donc le théorème n'est pas nécessaire)* l'intégration par parties s'écrit

$$\begin{aligned}(n+1)u_n &= \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x^{n+1} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{2(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x}$$

c) *On peut évidemment appliquer le thèorème de convergence dominée. J'utilise un méthode plus élémentaire, par majoration.* Comme $1 + x \geqslant 1 > 0$,

$$\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} \leqslant 1$$

Puis en multipliant par $x^{n+1} \geqslant 0$ et par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, par majoration,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

d) Par conséquent, d'après b) et c), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \sim \frac{1}{n\sqrt{2}}}$$

e) De nouveau, une intégration par parties, en repartant du b) :

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)u_n &= \frac{n+2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 (n+2)x^{n+1} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{n+2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\left(\left[x^{n+2} \times \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{3}{2}\frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{n+2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \qquad \alpha_3 = \frac{3}{4}}$$

f) De plus, par majoration comme au c) *(d'où l'intérêt de le rédiger de façon irréprochable la première fois : vous pouvez aller plus vite ensuite)* :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, par majoration,

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x = o(1)$$

Par conséquent e) s'écrit $(n+2)(n+1)u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} + o(1)$ puis

$$u_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}(n+2)(n+1)} + o\Big(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big)$$

Écrivons quelques développements limités à l'ordre 2 (dépasser $o(1/n^2)$ n'a aucun intérêt ici) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+2)(n+1)} &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\Big(1+o(1)\Big)\Big(1+o(1)\Big)\\ &= \frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

Ou bien $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ *donc* $= \dfrac{1}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Conclusion :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n\sqrt{2}} - \frac{3}{4n^2\sqrt{2}} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

3) a) À l'aide des mêmes intégrations par parties,

$$\begin{aligned}(n+3)(n+2)(n+1)v_n &= (n+3)(n+2)\left(\Big[x^{n+1}\times g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1}g'(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= (n+3)(n+2)g(1) - (n+3)\left(\Big[x^{n+2}g'(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{n+2}g''(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= (n+3)(n+2)g(1) - (n+3)g'(1) + \Big[x^{n+3}g''(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{n+3}g^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (n+3)(n+2)g(1) - (n+3)g'(1) + g''(1) - \int_0^1 x^{n+3}g^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or, comme g est de classe $\mathscr{C}^3$, $g^{(3)}$ est continue sur $[0,1]$, donc bornée et atteint ses bornes : $\|g^{(3)}\|_\infty$ existe. D'où par une majoration analogue à ci-dessus,

$$\left|\int_0^1 x^{n+3}g^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+3}|g^{(3)}(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \|g^{(3)}\|_\infty \int_0^1 x^{n+3}\,\mathrm{d}x = \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{n+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi,

$$v_n = \frac{g(1)}{n+1} - \frac{g'(1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{g''(1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

Puis en effectuant des développements limités de chacun des quotients, la suite (v_n) admet un développement de la forme

$$\boxed{v_n = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \Big(\frac{1}{n^3}\Big)}$$

$a_1 = g(1)$, mais les autres nécessitent plus de calculs. a_2 dépend de $g(1)$ et de $g'(1)$, etc...

b) h est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$, donc $\|h\|_\infty$ existe. Sa continuité en 1 s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [0,1], \ \Big(|x-1| \leqslant \eta \Longrightarrow |h(x) - h(1)| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé, on choisit un η qui convient. Comme $h(1) = 0$, la propriété s'écrit

$$\forall x \in [1-\eta, 1], \qquad |h(x)| \leqslant \varepsilon$$

Sur l'intervalle $[1-\eta, 1]$:

$$\left|\int_{1-\eta}^{\eta} nx^n h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{1-\eta}^{\eta} nx^n |h(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{1-\eta}^{\eta} nx^n \varepsilon\,\mathrm{d}x = \varepsilon(1-(1-\eta)^n) \leqslant \varepsilon$$

Sur l'intervalle $[0, 1-\eta]$: La suite $f_n(x) = nx^n h(x)$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1-\eta]$:

$$\|f_n\|_\infty^{[0,1-\eta]} \leqslant n(1-\eta)^n \|h\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, d'après le théorème d'interversion limite-intégrale, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1-\eta} nx^n h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\int_0^{1-\eta} nx^n h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

Conclusion : Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\int_0^1 nx^n h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_0^{1-\eta} nx^n h(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1-\eta}^1 nx^n h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\varepsilon$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

Un peu comme dans preuve du théorème de Cesaro, on coupe notre intégrale (que l'on peut voir comme une somme continue) en un $\eta > 0$ (qui joue le rôle du n_0 de Cesaro), et chacun des morceaux converge pour une raison différente.

Exercice 4 (D'après Mines Pont PC 2017)

1) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Convergence : Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 t^n e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $t^n e^{-t} = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$). Donc, par comparaison

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad I_n = n!$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Intégrons par parties : avec $u = t^{n+1}$ et $v = -e^{-t}$, comme $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$, le théorème d'intégration par partie nous dit que les deux intégrales qui suivent sont de même nature. Comme I_{n+1} converge d'après ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t^{n+1} \times (-e^{-t})\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (n+1)t^n(-e^{-t})\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)I_n \\ &= (n+1)! \qquad\qquad \text{(d'après } \mathcal{H}_n\text{)} \end{aligned}$$

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0,\ I_n = n!.}$

2) $e^{nx} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!}$ existe d'après l'énoncé. $T_n(x)$ est une somme finie, donc

$$\boxed{R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) \text{ existe et } T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}.}$$

3) **a)** Soit I un intervalle contenant 0. Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathcal{H}_n$: Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> : $\forall x \in I \quad f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ est vraie.
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+2}$ sur I. D'après $\mathcal{H}_n$, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : Pour tout $n \geqslant 0$, pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I,

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Soit $f(x) = e^{nx}$ pour tout $x \in I = \mathbb{R}$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R} f^{(k)}(x) = n^k e^{nx}$$

La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{nx} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} n^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t \\ &= T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{n(x-u)}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u = x - t\text{)} \end{aligned}$$

Or $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x)$ d'après 2). Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n(x) = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u}$$

4) **a)** Simplifions puis passons à l'exponentielle.

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2}\,M^{n+1}\,n!}{(n+1)!\,n^{n+1}\,M^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} M \\
&= e^{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} M \qquad \text{Or } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= e^{\frac{n+1}{n}+o(1)} M
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Me}$$

b) Si $0 < M < e^{-1}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = Me < 1$.

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum a_n$ converge absolument.

En particulier le terme général de cette série tend nécessairement vers 0 :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

c) Soit $\varphi(u) = ue^{-u}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = (1-u)e^{-u}$, d'où le tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Comme $x \in]0,1[$, le maximum de φ sur $[0,x]$ est atteint en x et vaut

$$\boxed{M = \max_{u\in[0,x]} ue^{-u} = xe^{-x} < e^{-1}}$$

d) Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après 3)b), $R_n(x) = e^{nx}\dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$. Or

$$0 \leqslant \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^x \sup_{u\in[0,x]} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$$

Comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\sup_{u\in[0,x]} (ue^{-u})^n = \left(\sup_{u\in[0,x]} ue^{-u}\right)^n$. Puis d'après 3)c),

$$0 \leqslant \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u \leqslant xM^n$$

Ainsi

$$\left|R_n(x)e^{-nx}\right| \leqslant x\frac{n^{n+1}}{n!}M^n = xa_n$$

Or d'après 3)a), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)e^{-nx} = 0$. Finalement :

$$\boxed{R_n(x) = o(e^{nx})}$$

De plus, d'après 2), $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx})$, donc

$$\boxed{T_n(x) \sim e^{nx}}$$

5) D'après la question 1, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$. Le théorème de changement variable, avec $u \mapsto t = nu$, $\mathscr{C}^1$ strictement croissant nous donne

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (nu)^n e^{-nu} n\,\mathrm{d}u = n^{n+1}\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u$$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}t$ converge aussi et

$$\begin{aligned}\int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u &= \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u - \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n!}{n^{n+1}} - \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx}\dfrac{n^{n+1}}{n!}\left(\dfrac{n!}{n^{n+1}} - \displaystyle\int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u\right)$. D'où

$$\boxed{T_n(x) = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u}$$

6) Soit $x > 1$. Pour tout $u \geqslant x$, par décroissance de φ sur $[x, +\infty[\subset [1, +\infty[$,

$$\boxed{(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}}$$

7) Soit $x > 1$. Comme ue^{-u} est intégrable sur $[0, +\infty[$ (question 1), on majore dans l'égalité trouvée au 5 grâce à l'inégalité du 6 :

$$\begin{aligned}0 \leqslant \frac{T_n(x)}{e^{nx}} &= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u && \text{(d'après la question 5)} \\ &\leqslant \frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}\,\mathrm{d}u && \text{(d'après la question 6)} \\ &\leqslant K\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n-1} && \left(\text{avec } K = \int_x^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant \frac{K}{M}\frac{n^{n+1}}{n!}M^n && \text{(avec } M = xe^{-x} < e^{-1}\text{, d'après 4.c)}\end{aligned}$$

Or d'après la question 4.b, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{n+1}}{n!}M^n = 0$. Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n(x)}{e^{nx}} = 0$, puis

$$\boxed{T_n(x) = o(e^{nx})}$$

FIN DE L'ÉPREUVE