Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

1) Calculs Préliminaires

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

i) Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $\mathbb{R}$, que l'on notera φ.

ii) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que

$$I(a) = C\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + D$$

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 2

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1) Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.

2) Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?

3) On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \dfrac{(2n-1)\, I_{n-1}}{2n}$.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Exercice 3

Pour tout entier n et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x}}$.

1) Étude de la suite (f_n).

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le tableau de variation de f_n.

b) Représenter sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2.

c) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.

d) A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$? Sur $[0,A]$ avec $A \in [0,1[$? (justifier).

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$(n+1)u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x$$

c) Déterminer la limite de $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(\sqrt{1+x})^3}\,\mathrm{d}x\right)$.

d) En déduire un équivalent de (u_n).

e) Déterminer des réels α_1, α_2 et α_3 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)(n+1)u_n = \alpha_1(n+2) + \alpha_2 + \alpha_3 \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(\sqrt{1+x})^5}\,\mathrm{d}x$$

f) En déduire un développement de la forme

$$u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

(on précisera les réels α et β, indépendants de n).

3) Généralisations.

a) Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur l'intervalle $[0,1]$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrer que (v_n) admet un développement de la forme

$$v_n = \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

b) Soit h une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $h(1) = 0$. Montrer que la suite $(n\displaystyle\int_0^1 x^n h(x)\,\mathrm{d}x)$ a pour limite 0. On pourra couper l'intégrale en $1-\eta$ avec $\eta > 0$ bien choisi à l'aide de la continuité de h en 1.

Exercice 4 (D'après Mines-Ponts)

Pour tout x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}$$

On admet que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

1) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, puis la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

3) Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ définie sur un intervalle I contenant 0, la formule de Taylor avec reste intégral en 0 s'écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer par récurrence cette formule.

b) En appliquant cette formule à la fonction $x \mapsto e^{nx}$, prouver à l'aide d'un changement de variable la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u$$

4) **a)** Soit $M > 0$. On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} M^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

b) (5/2 — pour les 3/2, admettre le résultat) Montrer que, si $0 < M < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

c) On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0,x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$.

d) En déduire que lorsque $n \to +\infty$,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \qquad \text{puis} \qquad T_n(x) \sim e^{nx}$$

5) Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante à l'aide du résultat de la question 1 :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u$$

6) Montrer que, pour $x > 1$ et pour tout $u \geqslant x$,

$$(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$$

7) En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN DE L'ÉPREUVE