Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) **a)** Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t \leqslant 1 &\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

En intégrant le dernier encadrement il vient $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

b) D'après ci-dessus, (a_n) est décroissante minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, la suite (a_n) converge.
Appliquons le théorème de convergence dominée :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\forall t \in [0,1], \qquad f_n(t) = \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue donc continue par morceaux sur $[0,1]$.
- Convergence simple : Soit $t \in [0,1]$ fixé.
  Si $t = 1$, $f_n(1) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
  Si $t \in [0,1[$, $f_n(t) = q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|q| < 1$.
  Donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto 0 \quad \text{si } t < 1 \\ \quad 1 \mapsto 1 \end{cases}$
- Domination : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$.
  L'encadrement $0 \leqslant \dfrac{1+t^2}{2} \leqslant 1$ du 1)a) nous donne ainsi

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varphi(t) = 1$$

Par conséquent, la suite (f_n) de fonctions continues par morceaux converge simplement vers f continue par morceaux et vérifie l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f_n| \leqslant \varphi$$

Avec $\varphi = 1$ intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, le théorème de convergence dominée nous dit que les f_n et f sont intégrables sur $[0,1]$ et que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=0$, donc

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ converge vers } 0}$$

Le théorème de convergence dominée donne la limite et *la convergence : il n'est pas nécessaire de montrer la convergence à part. Mais le TLM est immédiat, pourquoi s'en priver ?*

2) Appliquons le critère des séries alternées :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (déjà prouvé lors de la question 1)b)).
- D'après la question 1)a), la suite (a_n) est décroissante.
- D'après la question 1)c), la suite (a_n) converge vers 0.

Donc, d'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\text{La série } \sum(-1)^n a_n \text{ converge}}$$

3) **a)** *Qui dit calcul explicite d'une série dit presque toujours série géométrique !* Pour tout $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p&=\sum_{p=0}^{n}\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^p\\&=\frac{1-\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1+t^2}{2}}\\&=\frac{2}{3+t^2}-(-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

b) Pour tout $t\in[0,1]$, $t^2\geqslant 0$ donc $\dfrac{2}{3+t^2}\leqslant\dfrac{2}{3}$. *(Au pire on fait une étude de la fonction $t\mapsto\dfrac{2}{3+t^2}$.)*
Ainsi

$$\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{2}{3}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}a_{n+1}.$$

c) $t=\sqrt{3}\,u$ donc $\mathrm{d}t=\sqrt{3}\,\mathrm{d}u$ et, en n'oubliant pas les bornes, il vient

$$\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{2}{3+3u^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt3}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)-\operatorname{Arctan}(0)\right)$$

Or $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ *(Vous avez le droit de faire un cercle trigo au brouillon)* donc

$$\boxed{\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3\sqrt3}}$$

d) Montrons que $\displaystyle\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p\mathrm{d}t-\frac{\pi}{3\sqrt3}$ tend vers 0.
Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après 4)a),

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p-\frac{2}{3+t^2}=-(-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

Donc en intégrant, puis majorant les valeurs absolues à l'aide de 4)b), il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t-\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1\left|\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p-\frac{2}{3+t^2}\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}\end{aligned}$$

Or d'après 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. Donc par majoration la limite, pour $n\to+\infty$, de l'expression entre valeurs absolue existe et vaut 0. Par conséquent, d'après 4)c)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Attention ! Warning ! ***On ne peut pas intervertir limite et intégrale*** *sans utiliser des théorèmes. Cf le théorème de convergence dominée appliqué au 2) et le cours qui va avec.*

e) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale *(bien vérifier que la somme est finie)*, il vient

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_0^1\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p$$

Donc d'après 4)d), $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{n}(-1)^p a_p=\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 2 (PT 2022)

1) a) Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. La fonction $f : t\mapsto \dfrac{1}{1+x^2+t^2}$ est définie, positive et continue sur $\mathbb{R}$.

- Étude en $+\infty$: $f(t)\sim\dfrac{1}{t^2}$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$). Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Étude en $-\infty$: Comme $f(-t)=f(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, par parité de f, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{L'intégrale } F(x) \text{ converge pour tout } x\in\mathbb{R}}$$

b) $F(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=[\operatorname{Arctan} t]_{-\infty}^{+\infty}=\boxed{\pi}$

c) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, comme $1+x^2\neq 0$,

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{1+x^2+t^2}\\ &=\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\end{aligned}$$

On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$, avec $u = \dfrac{t}{\sqrt{1+x^2}}$, donc

$$F(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$$

Conclusion

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}}$$

2)

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}, \qquad I_n = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$$

a) Si $\alpha = 0$, (u_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Sinon, $\boxed{u_n \geqslant 0}$ et

$$u_n \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}$$

Or $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$. Donc, par théorème de comparaison des séries *positives*,

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2}$$

b) Soit $t \in [n\pi, (n+1)\pi] \subset \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
& 0 < n\pi \leqslant t \leqslant (n+1)\pi \\
\Longrightarrow\ & 0 < n^\alpha \pi^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant (n+1)^\alpha \pi^\alpha && \text{Car } \alpha \geqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & 0 < 1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t \leqslant 1 + t^\alpha \sin^2 t \leqslant 1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t && \text{Car } \sin^2 t \geqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} \leqslant \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t} \leqslant \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t} && \text{Par décroissance de } u \mapsto \frac{1}{u} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\Longrightarrow\ & \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+(n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
& && \text{Par croissance de l'intégrale} \\
\Longrightarrow\ & I_{n+1} \leqslant J_n \leqslant I_n && \text{Changement de variable } t = t - n\pi
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} \leqslant J_n \leqslant I_n}$$

c) i) Soit $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

$$1 + \frac{1}{\tan^2 t} = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \quad 1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}}$$

ii) Soit $\varphi :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$. La fonction φ est définie sur $]0, \pi[$, $\mathscr{C}^1$, de dérivée

$$\varphi'(t) = \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin^2 t} < 0$$

Donc φ est strictement décroissante, et bijective de $]0,\pi[$ dans $]-\infty,+\infty[$.
D'après le théorème de changement de variable,

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} + n^\alpha \pi^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2+n^\alpha\pi^\alpha}$$

sont de même nature. Elles sont donc convergentes d'après 1a (ou car I_n est sur un segment).
De plus

$$\boxed{I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)}$$

En n'utilisant pas la tangente, on évite le problème artificiel en $\pi/2$. Sinon, il faut regarder sur chacun des intervalles, le théorème s'appliquant sur un intervalle.

d) D'après ci-dessus, $I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ et d'après 1c, $F\left(n^{\frac{\alpha}{2}}\pi^{\frac{\alpha}{2}}\right) = u_n$.
Ainsi, l'inégalité 2b s'écrit, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{u_{n+1} \leqslant J_n \leqslant u_n}$$

e) <u>Comparaison de $\sum J_n$ et $\sum u_n$:</u>

Soit $\alpha < 2$. Comme $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant J_n$ d'après ci-dessus, et que $\sum u_n$ diverge d'après 2a, alors, d'après le théorème de majoration, $\sum J_n$ diverge.

Soit $\alpha > 2$. De même, comme $0 \leqslant J_n \leqslant u_n$ d'après ci-dessus, et que $\sum u_n$ converge d'après 2a, alors $\sum J_n$ diverge.

Ainsi, $\sum J_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

<u>Condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge</u>

Montrons que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ converge si et seulement si $\alpha > 2$. Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=0}^{n-1} J_k = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si I converge, alors $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ existe, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ aussi (avec n entier).
Ainsi $\sum J_k$ converge, et, d'après ci-dessus, $\alpha > 2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\alpha > 2$. D'après ci-dessus, $\sum J_k$ converge, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t} = \ell$ existe.
Définissons, sur $\mathbb{R}_+$, $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2 t}$, et $G : X \mapsto \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t}$ une primitive de g.
Comme $G' = g \geqslant 0$, la fonction G est croissante. Ainsi,

$$\forall X > 0, \quad G(X) \leqslant G(\lfloor x \rfloor + 1) \leqslant \ell$$

Donc G est croissante majorée. D'après le théorème de la limite monotone, G admet une limite.
Ce qui signifie que I converge.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2 t} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2}$$

Exercice 3 (Phénomène de Runge, d'après Centrale PC 2022)

1) Étude d'une intégrale généralisée.

a) <u>Variations de h_α</u> : La fonction h_α est définie sur $[0,1[$, dérivable comme composée de fonctions usuelles. Pour tout $t \in [0,1[$, $h_\alpha(t) = \ln(1-t^2) - \ln(\alpha^2+t^2)$, donc

$$\forall t \in [0,1[, \qquad h'_\alpha(t) = \frac{-2t}{1-t^2} - \frac{2t}{\alpha^2+t^2}$$

Or $1-t^2 > 0$ et $\alpha^2+t^2 > 0$, donc $h'_\alpha(t)$ est du signe de $-t$:

t	0		1
$h'_\alpha(t)$	0	$-$	$\|\|$
h_α	$-2\ln(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

Ainsi,

$$\boxed{h_\alpha \text{ est une fonction continue et décroissante sur } [0,1[}$$

<u>Convergence absolue de $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$:</u>

Étude en 1 : posons $t = 1-h$.

$$\begin{aligned} h_\alpha(1-h) &= \ln(1-(1-h)^2) - \ln(\alpha^2+(1-h)^2) \\ &= \ln(1-(1-h)) + \ln(1+(1-h)) - \ln(\alpha^2+(1-h)^2) \\ &= \ln(h) + \ln 2 + o(1) - \ln(\alpha^2+1) && \text{Développement pour } h \to 0 \\ &\sim \ln(h) \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente (absolument), par théorème de comparaison $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, c'est-à-dire

$$\boxed{h_\alpha \text{ est une fonction intégrable sur } [0,1[}$$

b) *Attention, il peut y avoir une subtilité :* $\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{t(t-1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2}$.
Donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge alors que* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ *divergent.*

D'après les calculs précédents ($1-t$, $1+t$ et α^2+t^2 sont strictement positifs sur $[0,1[$)

$$J_\alpha = \int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t$$

Comme $t \mapsto \ln(1+t)$ et $t \mapsto \ln(\alpha^2+t^2$ sont continues sur le segment $[0,1]$, leurs intégrales convergent.

Par le théorème de changement de variable, avec $u = 1-t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature — donc convergentes – et égales ($\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$ et inversion des bornes).

Ainsi,

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, par le changement de variable $u = 1 + t$ sur le segment $[0, 1]$, la seconde intégrale vaut $\int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u$. D'où

$$\boxed{\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln(1+t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}}$$

c) Une primitive de ln est $u \mapsto u \ln u - u$, d'où

$$\int_0^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u = [u \ln u - u]_0^2 = 2\ln 2 - 2$$

Effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ pour calculer la seconde intégrale.

Avec $\begin{cases} u = \ln(\alpha^2+t^2) & u' = \dfrac{2t}{\alpha^2+t^2}, \\ v = t & v' = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(\alpha^2+t^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(1+\alpha^2) - 2\int_0^1 1 - \frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{Car } \frac{t^2}{\alpha^2+t^2} = \frac{t^2+\alpha^2-\alpha^2}{\alpha^2+t^2} \\ &= \ln(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha\int_0^1 \frac{1/\alpha}{1+(t/\alpha)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \alpha > 0 = \ln(1+\alpha^2) - 2 - \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1/\alpha}{1+(t/\alpha)^2}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\,(t/\alpha)]_0^1 = \mathrm{Arctan}\,(1/\alpha)$. D'où

$$\boxed{J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $(\alpha > 0)$

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0} J_\alpha = 2\ln 2}$$

e) Par définition de la limite,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \gamma > 0,\ \forall \alpha \in]0, \gamma[, |J_\alpha - 2\ln 2| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon = \ln 2$, et γ qui convient,

$$\forall \alpha \in]0, \gamma[, \qquad 0 < \ln 2 = 2\ln 2 - \varepsilon \leqslant J_\alpha \leqslant 2\ln 2 + \varepsilon$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Il existe } \gamma > 0 \text{ tel que, pour tout } \alpha \in]0, \gamma[,\ J_\alpha > 0}$$

2) Application à une somme de Riemann.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, d'après 1 h_α est décroissant sur $[a_{k-1,n}, a_{k,n}]$ $(k - 1 \geqslant 0)$ donc

$$\begin{aligned} \forall t \in [a_{k-1,n}, a_{k,n}], \quad & h_\alpha(a_{k,n}) \leqslant h_\alpha(t) \leqslant h_\alpha(a_{k-1,n}) \\ \frac{1}{n}h_\alpha(a_{k,n}) \leqslant & \int_{a_{k-1,n}}^{a_{k,n}} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha(a_{k-1,n}) \quad \text{Par croissance de l'intégrale} \end{aligned}$$

En remplaçant les $a_{p,n}$ par leurs expressions, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leqslant \int_{(2k-1)/(2n)}^{(2k+1)/(2n)} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2k-1}{2n}\right)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les encadrements précédents entre $k=1$ et $k=n-1$, il vient

$$-\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)+S_n(h_\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}h_\alpha(a_{k,n})\leqslant\int_{1/(2n)}^{(2n-1)/(2n)}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}h_\alpha(a_{k-1,n})$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}h_\alpha(a_{k-1,n})=\sum_{k=0}^{n-2}h_\alpha(a_{k,n})$

$$=nS_n(h_\alpha)-h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$

Donc le premier encadrement s'écrit

$$-\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)+S_n(h_\alpha)\leqslant\int_{1/(2n)}^{(2n-1)/(2n)}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t\leqslant S_n(h_\alpha)-\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$$

Le membre de gauche s'écrit aussi

$$S_n(h_\alpha)\leqslant\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{1/(2n)}^{(2n-1)/(2n)}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$$

et celui de droite

$$\int_{1/(2n)}^{(2n-1)/(2n)}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\leqslant S_n(h_\alpha)$$

D'où l'encadrement de $S_n(h_\alpha)$ $(n>0)$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\leqslant S_n(h_\alpha)\leqslant\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right)+\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t.}$$

c)
- Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)$:
  D'après 1a, $h_\alpha(1-h)\sim\ln(h)$.
  Donc $h_\alpha\left(\dfrac{2n-1}{2n}\right)=h_\alpha\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)\sim\ln(1/2n)\sim-\ln n$. Ainsi, par croissance comparée,
  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{\ln n}{n}=0$$
- Calculons $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right)$:
  Par continuité de h_α en 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right)=h_\alpha(0)$. Donc
  $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right)=0$$

Par conséquent, es deux cotés de l'encadrement convergent vers $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n}h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t=J_\alpha$.
Conclusion : par encadrement,

$$\boxed{\text{La suite }(S_n(h_\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ converge vers }J_\alpha}$$

d) Soit $\alpha\in\,]0,\gamma[$: $J_\alpha>0$. Donc, d'après 2c,

$$S_n(h_\alpha)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}h_\alpha(a_{k,n})\sim J_\alpha$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}h_\alpha(a_{k,n})\sim nJ_\alpha\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}h_\alpha(a_{k,n})=\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right)$. En composant par l'exponentielle, les *limites* nous donnent

$$\boxed{\text{La suite } \left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2+a_{k,n}^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty}$$

3) Le phénomène de Runge.

a) Considérons le polynôme $P(X) = R_n(-X)$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, comme f_α est paire,

$$\begin{aligned} P(a_{k,n}) &= R_n(-a_{k,n}) \\ &= f_\alpha(-a_{k,n}) \\ &= f_\alpha(a_{k,n}) \end{aligned}$$

De même, $P(-a_{k,n}) = f_\alpha(-a_{k,n})$.
Donc P est un polynôme de degré au plus $2n-1$, qui coïncide avec f_α aux points $\pm a_{k,n}$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Par unicité de R_n, $P = R_n$. Conclusion :

$$\boxed{R_n \text{ est un polynôme pair}}$$

De plus, comme $i^2 = -1$,

$$\boxed{Q_n(\alpha \mathrm{i}) = 1 - ((\alpha i)^2 + \alpha^2)R_n(\alpha i) = 1}$$

b) <u>Racines de Q_n</u> : Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. D'après a,

$$\begin{aligned} Q_n(a_{k,n}) &= 1 - (a_{k,n}^2 + \alpha^2)R_n(a_{k,n}) \qquad \text{Or, par définition de } R_n,\ R_n(a_{k,n}) = f_\alpha(a_{k,n}) \\ &= 1 - (a_{k,n}^2 + \alpha^2)\frac{1}{(a_{k,n}^2 + \alpha^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc Q_n admet $a_{k,n}$ pour racine. Et, par parité, $-a_{k,n}$.
<u>Conclusion</u> : Ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q_n = P\prod_{k=0}^{n-1}(X - a_{k,n})(X + a_{k,n})$$

Or $\deg Q_n \leqslant 2n+1$. Comme Q_n est pair, $\deg Q_n \leqslant 2n$. Par conséquent, $\deg P \leqslant 0$: $P = \lambda_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\exists \lambda_n \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2)}$$

En évaluant en αi, $\lambda_n = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha^2 + a_{k,n}^2)}$.

c) D'après b, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$Q_n = 1 - \frac{1}{f_\alpha(x)}R_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2)$$

D'où, en multipliant par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$,

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad f_\alpha(x) - R_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}}$$

d) En évaluant en $x = 1$ et en prenant la valeur absolue, on retrouve la suite du 2c. Si $\alpha < \gamma$, elle tend vers $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty}$$

Donc (R_n) ne converge pas simplement vers f_α : pas de convergence en $x = 1$. Et même, divergence vers $+\infty$.

FIN DE L'ÉPREUVE