Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'utilisation d'effaceurs chimiques ou de « vernis » de masquage est interdite. Tous les textes sont obligatoirement écrits à l'encre bleue foncée ou noire. L'usage du crayon à papier est interdit. D'autres couleurs peuvent être utilisées pour améliorer la présentation. Il est interdit de coller, couper les copies et adjoindre des brouillons.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

On s'intéresse dans ce problème à la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

On cherche ensuite à obtenir, par deux méthodes, des approximations de π à l'aide de séries numériques.

Partie 1 (Préliminaires)

1) Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Rappeler, sans preuve, une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$. On distinguera deux cas.

2) On rappelle que la notation Arctan désigne la fonction arctangente. Donner, sans justification, l'ensemble de définition de la fonction Arctan, son ensemble de dérivabilité, sa dérivée et son tableau de variation, qui fera apparaître les limites.

Partie 2 (Étude de la série)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

1) La série de terme général u_n est-elle absolument convergente ? Toute réponse doit (évidemment) être justifiée.

2) Montrer que la série de terme général u_n converge. On donnera aussi une majoration du reste d'ordre n.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $I_{2k} = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

5) Démontrer que, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

6) En déduire la somme de la série de terme général u_n, que l'on exprimera sans somme et sans intégrale.

Partie 3 (Un procédé élémentaire d'approximation de π)

1) Démontrer, à l'aide de la partie précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|4U_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}$$

2) En déduire une approximation de π à 10^{-3} près sous forme d'une somme de rationnels.

Partie 4 (Un autre procédé d'approximation de π)

Soit $t_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

1) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On donnera une fraction faisant intervenir π et un entier.

2) En déduire que $\pi = 2\sqrt{3}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

3) Donner une majoration du reste d'ordre n de cette série.

4) De combien de terme a-t-on besoin pour obtenir une approximation de π à 10^{-3} près ?

Exercice 2

Partie 1

1) Quelle est la période de la fonction tan ?

2) Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) Démontrer l'existence d'une suite de polynômes (T_n) telle que :

- $T_0(X) = X$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$

On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.

4) Expliciter les polynômes T_1, T_2 et T_3.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?

6) Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels (t_k) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t))\,\mathrm{d}t$$

On citera le théorème utilisé.

Partie 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et R_n la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

On suppose que f est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$ tel que $x \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1) Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité : $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$.

2) Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a) Démontrer que la suite $(R_n(b))$ est convergente.

b) Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier :

i) $R_n(x) = \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$

ii) $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$

iii) $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

c) En déduire que, pour tout $x \in]-b, b[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

3) Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$.

Exercice 3 (Autour de la gaussienne)

Les deux parties sont très indépendantes.

Partie 1

1) Donner les solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 0$$

Dans ce qui suit, on désignera par f la solution de cette équation prenant la valeur 1 en $x = 0$.

2) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

3) Déterminer la dérivée seconde f'' et troisième f''' de f.

4) Déterminer, après avoir justifié leur existence :

$$\max_{t \in [0,1]} |f(t)|, \qquad \max_{t \in \mathbb{R}} |f'(t)|, \qquad \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|$$

On pourra s'aider de tableaux de variations.

5) Énoncer le théorème des accroissements finis.

6) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$, que l'on explicitera, tel que

$$\forall (x, y) \in [0,1]^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

7) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de f s'exprime à l'aide de f et d'une fonction polynomiale H_n, dont on précisera la parité et le degré. On désignera par $a(H_n)$ le coefficient dominant de H_n.

8) Donner, pour tout entier naturel n, une relation entre $a(H_n)$ et $a(H_{n+1})$, puis exprimer $a(H_n)$ en fonction de n.

Partie 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = x \int_1^2 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Étudier la parité de F.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

3) Étudier la continuité et la dérivabilité de F (on pourra utiliser le résultat du préliminaire donnant $\max_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$).

4) Rappeler le développement limité de exp à l'ordre n en 0, puis en déduire celui de F à l'ordre $2n+1$ en 0.

5) Que vaut $\lim_{x\to+\infty} F(x)$?

6) **a)** Donner l'expression de la dérivée de F.

b) Résoudre $F'(x) = 0$.

c) Déterminer le tableau de variations complet de F.

7) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$xe^{-4x^2} \leqslant F(x) \leqslant xe^{-x^2}$$

8) Tracer l'allure du graphe de la fonction F.

9) **a)** Justifier la fait que la fonction F admette des primitives sur $\mathbb{R}$. On désignera par G la primitive de F s'annulant en 0.

b) On introduit $\ell_G = \lim_{x\to+\infty} G(x)$. Justifier l'existence de ℓ_G dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{8} \leqslant \ell_G \leqslant \dfrac{1}{2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE