

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (d'après CAPES)

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[p, p+1] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

En intégrant cette inégalité entre p et $p+1$, on obtient : $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}$

(C'est un classique de la comparaison série/intégrale. Raisonnement à maîtriser parfaitement.)

Puis $-\dfrac{1}{p} \leqslant -\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1}$ et finalement

$$\boxed{0 \leqslant a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}$$

2)

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités précédents pour p variant de 1 à n, on obtient une somme télescopique
$$0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$
Donc
$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est majorée}}$$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite (S_n) est croissante. Or (S_n) est majorée, donc, d'après le théorème de la limite monotone,
$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ converge}}$$
- De l'encadrement $0 \leqslant S_n \leqslant 1$ trouvé ci-dessus, on déduit par passage à la limite
$$\boxed{0 \leqslant \gamma \leqslant 1}$$

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
a_p &= \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+p} && \text{En faisant le changement de variable } t = u + p \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{u+p} \right) \mathrm{d}u && \text{Car } \frac{1}{p} = \int_0^1 \frac{1}{p}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{p+t}$ est décroissante sur $[0,1]$ donc

$$\begin{aligned}
& \forall t \in [0,1], && \frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{t+p} \leqslant \frac{1}{p} && \\
\Longrightarrow\ & \forall t \in [0,1], && \frac{1}{p+1}t \leqslant \frac{t}{t+p} \leqslant \frac{1}{p}t && \text{Car } t \geqslant 0 \\
\Longrightarrow\ & && \frac{1}{p+1}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t && \text{Par croissance de l'intégrale} \\
\Longrightarrow\ & && \frac{1}{2p(p+1)} \leqslant \quad a_p \quad \leqslant \frac{1}{2p^2} && \text{Car } \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1-p}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p(p+1)}$ et, de même, pour $p \geqslant 2$, $\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p(p-1)}$.
Ainsi, les inégalités précédentes s'écrivent, pour $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2p^2} \leqslant \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)}$$

4) Soient m et n des entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}
S_m - S_n &= \sum_{p=1}^{m} a_p - \sum_{p=1}^{n} a_p \\
&= \sum_{p=n+1}^{m} a_p
\end{aligned}$$

donc d'après l'encadrement précédent :

$$\frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{m}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

d'où après télescopage :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

et, en passant à la limite lorsque $m \to +\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

5) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = S_n + \ln(n+1)$ donc

$$\begin{aligned}
H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} &= S_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{=} S_n - \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

en utilisant le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
Or, d'après l'inégalité précédente :

$$0 \leqslant S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

D'où
$$0 \leqslant n\left(S_n - \gamma + \frac{1}{2n}\right) \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$$
Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(S_n - \gamma + \frac{1}{2n}\right) = 0$, puis $S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où finalement :
$$\boxed{H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

6) L'inégalité trouvée à la question 4 s'écrit, avec $\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}$,
$$\boxed{0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}}$$

7) Pour $n = 7$, l'inégalité précédente donne $0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{112} < 10^{-2}$, donc T_7 convient.

Pour votre culture mathématique, on trouve $T_7 = \frac{1487}{560} - 3 * \ln(2) \approx 0.575915601$ alors que $\gamma \approx 0.57721566490153286061$.

Exercice 2 (E3A PC 2019)

Question préliminaire : *Une variante de cet exercice a été abordé en TD. L'intégrale est linéaire, donc on utilise l'écriture adaptée des nombres complexes, $A + iB$.*
Simplifions :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{x+ia} = \frac{x-ia}{x^2+a^2} = \frac{x}{x^2+a^2} - i\frac{a}{x^2+a^2}$$
Comme $a \neq 0$, posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) - i \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \frac{x}{x^2+a^2} - i\frac{1/a}{1+(x/a)^2} = \frac{x}{x^2+a^2} - i\frac{a}{x^2+a^2}$$
Conclusion :
$$\boxed{\text{Une primitive qui convient est } x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right) - i\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

1) **a)** Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
$$f_{\alpha,\lambda}(t) \sim_0 t^\alpha \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$
En conclusion : $\boxed{A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}$

Mais l'ensemble des couples tels que $f_{\alpha,\lambda}$ ait une limite *finie* en 0 est $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$.

b) Soit $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. La fonction $f_{\alpha,\lambda}$ est continue donc continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. $f_{\alpha,\lambda} \geqslant 0$.

Étude en 0 :

D'après l'équivalent $f_{\alpha,\lambda}(t) \sim \frac{1}{t^{-\alpha}}$ trouvé au 1)a), comme (intégrales de Riemann en 0)
$$\int_0^1 \frac{1}{t^{-\alpha}}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } -\alpha < 1$$

par comparaison (car $f_{\alpha,\lambda} \geqslant 0$), $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Étude en $+\infty$: Par croissance comparée,

$$t^2 f_{\alpha,\lambda}(t) = t^{\alpha+2}e^{-\lambda t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc $f_{\alpha,\lambda}(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $2 > 1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$. Ainsi,

$$\boxed{B =]-1,+\infty[\times\mathbb{R}_+^*}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t) \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant f_{-\frac{1}{2},1}(t)$$

Or $(-1/2,1) \in B$, donc d'après 1)b), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-\frac{1}{2},1}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par théorème de majoration,

$$\boxed{t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0,+\infty[}$$

3) **a)** Comme cosinus est paire et sinus impaire,

$$\boxed{U \text{ est paire et } V \text{ est impaire}}$$

b) $U(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge d'après 2.

La fonction $u \mapsto u^2$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty$ dans $]0,+\infty[$. Posons $t = u^2$, d'où $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

Par conséquent, d'après le théorème de changement de variable, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature – donc convergentes – et

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Conclusion

$$\boxed{U(0) = \sqrt{\pi}}$$

4) La fonction g est continue donc continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

De plus, $|g| \leqslant f_{-1/2,\lambda}$ et d'après 1)b), $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{-1/2,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, d'après le théorème de majoration,

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$$

5) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(u+n\pi)}}{\sqrt{u+n\pi}} \sin(u+n\pi)\,\mathrm{d}t && \text{Avec le changement de variable } t = u + n\pi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)\mathrm{d}t && \text{Car } \sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin(\theta) \end{aligned}$$

Vu le résultat à trouver, c'est un peu comme si on vous avait dit « effectuer le changement de variable $t = u + n\pi$. ». Ici l'intégrale est sur un segment dès que $n > 0$, il n'est pas nécessaire de prendre des pincettes.

Conclusion :

$$\boxed{a_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \forall t \in]0,\pi], && t + (n+1)\pi \geqslant t + n\pi > 0 \\ \Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \sqrt{t+(n+1)\pi} \geqslant \sqrt{t+n\pi} > 0 \quad \text{et} \quad -\lambda(t+(n+1)\pi) \leqslant -\lambda(t+n\pi) \\ \Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && 0 < \frac{1}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} \quad \text{et} \quad 0 < e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)} \leqslant e^{-\lambda(t+n\pi)} \\ \Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \quad \text{Car tout est } \geqslant 0 \\ \Longrightarrow\ & \forall t \in]0,\pi], && \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \sin(t) \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t) \quad \text{Car } \sin(t) \geqslant 0 \text{ sur }]0,\pi] \\ \Longrightarrow\ & && \int_0^{\pi} \frac{e^{-\lambda(t+(n+1)\pi)}}{\sqrt{t+(n+1)\pi}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{Par croissance de l'intégrale} \\ \Longrightarrow\ & && a_{n+1} \leqslant a_n \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante}}$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est positive comme intégrale d'une fonction positive. De plus elle est décroissante, donc elle converge.

Si vous êtes à l'aise avec le théorème de convergence dominée, il suffit de poser $f_n(t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t)$. On regarde ensuite la limite pour la convergence simple, qui est $f = 0$, puis on majore, par $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ par exemple. Mais on peut aussi plus simplement majorer directement a_n.

Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $t \in]0,\pi]$, $0 < \sqrt{n\pi} \leqslant \sqrt{t+n\pi}$ puis

$$0 \leqslant \frac{e^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}} \sin(t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

Donc en intégrant

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où, par encadrement,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$$

6) **a)** La suite (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle. Donc, d'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k \text{ converge}}$$

b) Toujours d'après le critère des séries alternées, S est du signe du premier terme, $(-1)^0 a_0$. Donc

$$\boxed{S > 0}$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}(-1)^k a_k &= \sum_{k=0}^{N}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t && \text{Par définition de } a_k\\ &= \int_0^{(N+1)\pi} g(t)\,\mathrm{d}t && \text{Chasles}\end{aligned}$$

La série (question 6)a)) comme l'intégrale (question 4) convergent, donc lorsque $N \to +\infty$,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k}$$

7) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto tx$ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Posons $u = tx$, donc $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème de changement de variable, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}}\,\mathrm{d}u$ sont de même nature – donc convergentes – et

$$\begin{aligned}V(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}S && \text{Avec } \lambda = \frac{1}{x} > 0\end{aligned}$$

D'après la question 6b, $S > 0$, donc

$$\boxed{V > 0}$$

Vous pourrez lire la suite du sujet – il manque quelques questions – dans quelques semaines.

Exercice 3 (D'après banque PT)

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\ t}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\ t}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}\ t}$$

Et de plus $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \sim \dfrac{2}{e^t} = 2e^{-t}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge $(1 > 0)$, donc, par équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}\ t}\,\mathrm{d}t$ aussi, puis, par majoration

$$\boxed{\psi(x) \text{ converge absolument donc converge}}$$

2) **a)** Soit $X \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \neq -1$, la somme des termes d'une suite géométrique s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{N}(-X)^k = \frac{1-(-X)^{N+1}}{1-(-X)} = \frac{1}{1+X} - \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}$$

En conclusion, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R}-\{-1\}\ \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1+X} = \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k X^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. La formule de la question 2)a), avec $X = e^{-2t}$ (>0 donc $\neq -1$), s'écrit

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k (e^{-2t})^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}(e^{-2t})^{N+1}}{1+(e^{-2t})}$$

Donc $\dfrac{1}{\text{ch } t} = \dfrac{2}{e^t+e^{-t}} = \dfrac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2e^{-t}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \dfrac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$

c) En remplaçant $\dfrac{1}{\text{ch } t}$ par la formule trouvée en 2)b) dans l'expression de ψ, on trouve que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right] \mathrm{d}t}$$

3) **a)** La fonction $t \mapsto e^{-t}\cos(xt)\dfrac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : Comme $|\cos| \leqslant 1$, il vient

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}}$$

De plus $\dfrac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}} \sim \dfrac{e^{-2(N+2)t}}{1} = e^{-2(N+2)t}$. Or $2(N+2)>0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2(N+2)t}\,\mathrm{d}t$ converge, et par comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t$. Puis, par majoration,

$$\boxed{R_N(x) \text{ converge absolument donc converge}}$$

b) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{-2t} \geqslant 0$ et $e^{-t} \leqslant 1$ donc

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\qquad |h(x,t)| = \left|\frac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 1$$

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est bornée par 1 sur } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la majoration trouvée en 3)b),

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right| = |h(x,t)|e^{-2(N+1)t} \leqslant e^{-2(N+1)t}$$

Or $t \mapsto e^{-2(N+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($2(N+1)>0$), donc, en intégrant, l'inégalité s'écrit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad |R_N(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(N+1)}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2(N+1)} = 0$, donc en conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0.}$

On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée avec pour fonction de domination la fonction $\varphi = h(x,.)$.

4) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

$\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \cos(xt) e^{-(2k+1)t} = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|\cos(xt)e^{-(2k+1)t}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et est intégrable.

Passons par les complexes : $\cos(xt) = \Re\left(e^{ixt}\right)$. Par linéarité de l'intégrale,

$$J_k(x) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1-ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \Re\left[-\frac{1}{2k+1-ix}e^{-(2k+1-ix)t}\right]_0^{+\infty} = \Re\left(\frac{1}{2k+1-ix}\right)$$

En Conclusion, $\boxed{J_k(x) = \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$

(On pouvait aussi faire deux intégrations par parties.)

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 2)c), $\psi(x) = 2\int_0^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\right) + e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t.$

Or chacun des termes de cette somme est intégrable (questions 3)b) et 4)), donc en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient

$$\psi(x) = 2\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k J_k(x)\right) + 2R_N(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right) + 2R_N(x)$$

Or, d'après 3)b), $\lim\limits_{N \to +\infty} R_N(x) = 0$, donc la série $\left(\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi(x)$.

En résumé, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k(x) \text{ avec } u_k(x) = 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$

FIN DE L'ÉPREUVE