Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
On cherche à étudier la limite γ, appelée constante d'Euler, de la suite :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $0 \leqslant a_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

2) En déduire que la suite (S_n) est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $a_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+p}\,\mathrm{d}t$, puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite (H_n) :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice 2 (E3A PC 2019)

Question préliminaire : Soit a un réel non nul.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout réel x associe le nombre complexe $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}a}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif.
Pour tout réel α et tout réel $\lambda > 0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble A des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\displaystyle\lim_{t\to 0,\, t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.

b) Déterminer l'ensemble B des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\mathrm{d}t$ converge.

2) Montrer que pour tout x réel, les fonctions

$$t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$$

sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

3) On définit alors, sur $\mathbb{R}$, les deux fonctions U et V par :

$$U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

a) Étudier la parité des deux fonctions U et V.

b) À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) Pour tout réel t, on note $g(t) = f_{-1/2,\lambda}(t)\sin(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(t)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\mathrm{d}t$.

a) Prouver que pour tout entier naturel n, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

c) Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

6) **a)** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$ converge. On note S sa somme.

b) Montrer que $S > 0$.

c) En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

7) À l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

Exercice 3

On considère l'application ψ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}\, t}\,\mathrm{d}t$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'intégrale $\psi(x)$ ci-dessus converge.

2) **a)** Montrer que, pour tout réel $X \neq -1$ et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{1+X} = \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k X^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}$$

b) En déduire que, pour tout réel t et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\, t} = 2e^{-t}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$$

c) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on notera

$$R_N(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$

3) **a)** Montrer que l'intégrale $R_N(x)$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}$ est bornée sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4) N désignant un entier naturel non nul, calculer, pour tout entier k de $[\![0,N]\!]$

$$J_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\,\mathrm{d}t$$

5) Montrer que, pour tout réel x, $\psi(x)$ peut s'exprimer comme la somme d'une série

$$\psi(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k(x)$$

et donner, pour tout entier k ; une expression de $u_k(x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE