Épreuve de Mathématiques 2

Correction

4

Exercice 1 (D'après CCP TPC 2018)

1) La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$, et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) < 0$$

Vous écrivez $\varphi = e^u$ donc $\varphi' = u'e^u$, puis $u(t) = t^{-0,5}$ donc $u'(t) = -0,5t^{-1,5}$, mais je ne veux évidemment aucune erreur à cette question. Prenez votre temps, ne sautez pas d'étape.

t	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$		-
φ	$+\infty$	1

2) Variations de f .

a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$, et φ est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Soit Φ une primitive de φ , continue, sur $\mathbb{R}_+^*$. Par définition, Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt = [\Phi(t)]_x^{2x} = \Phi(2x) - \Phi(x)$$

Ainsi, comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$,

f est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x)$

Toujours la même méthode : donner un nom à la primitive de ce qu'il y a dans l'intégrale, et tout devient simple. Il faut impérativement que le mot « primitive » apparaisse, pour justifier que f est $\mathcal{C}^1$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\varphi(2x) - \varphi(x) \\ &= 2 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \left[2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}\right) \right] \\ &= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)}_{>0} \left[2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Écrire ce qu'on a, et le but en bas de la page : vous réussirez à combler entre les deux.

$$f'(x) \text{ est du signe de } u(x) = 2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

d) Signe de u : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} u(x) > 0 &\iff 2 > \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ &\iff \ln 2 > \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) && \text{(Croissance de } \ln) \\ &\iff \sqrt{x} > \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\ln 2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 \ln 2} && (\ln 2 > 0 \text{ et } \sqrt{x} > 0) \\ &\iff x > \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 \ln 2}\right)^2 = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4(\ln 2)^2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(\ln 2)^2} \end{aligned}$$

Posons $x_0 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2(\ln 2)^2}$. Le calcul des limites de u aux bornes permet aussi de déterminer le signe dans les cases, si on se contente de résoudre $u(x) = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2 - 1 = 1 > 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[2 - \exp\left(X^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \right] = -\infty.$$

x	0	x_0	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
f				

3) Étude de f aux bornes.

a) Voir les exercices faits en cours.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction φ est décroissante, donc

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \varphi(2x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x)$$

En intégrant entre x et $2x$, il vient

$$\int_x^{2x} \varphi(2x) dt \leq \int_x^{2x} \varphi(t) dt \leq \int_x^{2x} \varphi(x) dt$$

En conclusion :

$$\forall x > 0, \quad x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

b) En 0 : Avec $X = \frac{1}{\sqrt{x}}$, par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X^2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} X\right) = +\infty$$

Donc, d'après 3)a), par minoration,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$: D'après 1), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(2x) = 1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \varphi(2x) = +\infty$$

Donc, d'après 3)a), par minoration,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

On profite de tous les moyens possibles de vérification : par exemple, systématiquement vérifier la cohérence avec le tableau de variations.

c) L'étude précédente nous donne même mieux : d'après 3)a),

$$\forall x > 0, \quad \varphi(2x) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \varphi(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(2x) = 1$, donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. En conclusion,

$$\boxed{f(x) \sim x}$$

Au brouillon, on prend un équivalent de chaque extrémité de notre encadrement : $x\varphi(2x) \sim x$ et $x\varphi(x) \sim x$.
Donc on a un bon candidat, $v(x) = x$. Puis on cherche la limite de $\frac{u}{v} = \frac{f(x)}{x}$... grâce à ce même encadrement.

4) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on a, lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right) \\ &= 1 + x^{-1/2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6}x^{-3/2} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

Donc en primitivant le développement limité, où $K \in \mathbb{R}$ est une constante dépendant du choix de Φ ,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= K + x + \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + \frac{1}{2} \ln x + \frac{x^{-3/2+1}}{6 \times (-1/2)} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= K + x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

D'où le développement asymptotique de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \Phi(2x) - \Phi(x) \\ &= K + 2x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 2x - \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \left[K + x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right] \\ &= x + 2(\sqrt{2} - 2)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{f(x) = x + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, on étudie $f(x) - x \sim \sqrt{x}$, qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$:

La fonction f n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

Exercice 2 (D'après EDHEC ECE 2018)

Partie 1

1)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

Donc $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1}$

2) Intégration par partie : posons $\begin{cases} u = \ln(1+t^2) \\ v' = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u' = \frac{2t}{1+t^2} \\ v = t \end{cases}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(1+t^2) dt &= \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2} dt \\ &= x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2} dt && \text{D'après 1)} \\ &= x \ln(1+x^2) - 2[t - \text{Arctan } t]_0^x \\ &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{Arctan } x \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \text{Arctan}(x)}$$

3) On cherche au brouillon, d'abord de façon peu formelle, pour avoir une idée, puis proprement avec des équivalents et des DL. On rédige ensuite en ayant un but précis.

D'après ci-dessus,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\ln \left(x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) - 2 \right) + 2 \text{Arctan } x \\ &= x \left(2 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - 2 \right) + 2 \text{Arctan } x \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \pi/2$, donc $\text{Arctan}(x) = o(x)$ en $+\infty$, et $\ln(1+1/x^2) = o(1)$ en $+\infty$. Ainsi,

$$f(x) = x(2 \ln x + o(\ln x)) + o(x) = 2x \ln x + o(x \ln x)$$

Conclusion :

$$\boxed{f(x) \sim 2x \ln x}$$

Partie 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t^2))^{n+1} - (\ln(1+t^2))^n dt \\ &= \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n [\ln(1+t^2) - 1] dt \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $1 \leq 1+t^2 \leq 2 < e$, donc, par croissance du logarithme,

$$0 = \ln 1 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln 2 < \ln e = 1 \quad (1)$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $u_{n+1} - u_n < 0$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

De plus, toujours d'après l'encadrement (1) ci-dessus, $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (u_n) est décroissante minorée par 0, donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

2) D'après l'encadrement (1) obtenu au 1),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq (\ln(1+t^2))^n \leq (\ln 2)^n$$

Puis en intégrant, par croissance de l'intégrale,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \leq \int_0^1 (\ln 2)^n dt = (\ln 2)^n$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n}$$

3) Comme $0 \leq \ln 2 < 1$, $\sum (\ln 2)^n$ est une série géométrique convergente.
Donc d'après 2, par majoration (séries à termes positifs)

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

4) a) D'après (1), $1 - \ln(1+t^2) \geq 1 - \ln 2 > 0$. Ainsi,

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln 2}$$

En intégrant entre 0 et 1, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}}$$

b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après 2 (encadrement), par l'encadrement trouvé au 4)a),

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. $\ln(1+t^2) \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^n (\ln(1+t^2))^k = \frac{1 - (\ln(1+t^2))^{n+1}}{1 - \ln(1+t^2)} = \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} - \frac{(\ln(1+t^2))^{n+1}}{1 - \ln(1+t^2)}$$

En intégrant entre 0 et 1,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt - v_n$$

Or d'après b, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt}$$

Là aussi, pour la dernière question de l'exercice, vous pouvez vous servir d'un brouillon (où l'on commence par regarder $\sum_{k=0}^n u_k$). Puis rédiger de façon claire : on a besoin de calculer $\sum_{k=0}^n \ln(1+t^2)^k$.

Exercice 3 (Agro 2009 – corrigé UPS)

La quantité $S_n(f)$ est la n -ème somme de Riemann de la fonction f sur $[0; 1]$. La fonction f étant continue sur ce segment, un théorème du cours dit que

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(f)) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t) dt.}$$

1) Application

a) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n) + 1} = S_n(h) \quad \text{où} \quad \forall x \in [0; 1], h(x) = \frac{1}{1+x},$$

donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann rappelé à la question 0, (u_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln |1+x|]_0^1 = \ln 2 - 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.}$$

b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2k'+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} && \text{en posant } k = k' + n \\ &&& \text{dans la première somme} \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} \\ &= u_{2n}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.}$$

Cherchez au brouillon en écrivant les sommes avec des pointillées : vous comprendrez forcément comment fonctionne le calcul.

c) La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$.

Or la suite (u_{2n}) étant extraite de (u_n) , elle converge vers la même limite que (u_n) , c'est-à-dire $\ln 2$. Donc (v_n) converge (comme combinaison linéaire de suites convergentes) et l'on a

$$\lim v_n = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{(v_n) \text{ converge bien vers } \frac{1}{2} \ln 2.}$$

C'est une question « montrer que » : il faut détailler. De plus, elle peut se traiter même si vous n'avez pas su faire le b.

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

a) La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée troisième $f^{(3)}$ est a fortiori continue sur le segment $[0; 1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0; 1], \quad |f^{(3)}(x)| \leq M.}$$

b) i) Comme nous le suggère l'énoncé, appliquons la formule de Taylor reste intégral à la fonction f sur l'intervalle $[k/n; t]$ où elle est de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui donne

$$f(t) = f\left(\frac{k}{n}\right) + \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u) du$$

La formule de Taylor reste intégral se retrouve : vous savez tous que $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(u) du$.

Donc, sous forme Taylor, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u) \times 1 du$.

Puis une IPP vous donne $f(x) = f(a) + xf'(a) + \int_a^x f''(u) \frac{(x-u)^1}{1!} du$. Etc.

Par suite, on a

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u) du \right|$$

Puis, comme, pour tout $u \in [k/n, t] \subset [0; 1]$, $(t-u)^2 \geq 0$ et $|f^{(3)}(u)| \leq M$ d'après le résultat de la question précédente,

$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u) du \right| \leq \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} |f'''(u)| du \leq \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} M du = \frac{1}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 M$$

En conclusion,

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3.$$

ii) En dérivant, on constate que

$$\text{La primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1} \left(t - \frac{k}{n}\right)^{q+1}$$

Avant de vous convaincre que vous ne savez pas faire, essayez. Quelque chose de plausible : du X^{q+1} .

iii) On a

$$\begin{aligned} & \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \\ &= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} 1 dt - f'\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right) dt \\ & \quad - \frac{1}{2} f''\left(\frac{k}{n}\right) \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 dt \\ &= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) [t]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\left(\frac{k}{n}\right) \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ & \quad - \frac{1}{2} f''\left(\frac{k}{n}\right) \left[\frac{1}{3} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} - f'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{2n^2} - f''\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{6n^3}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &= \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right] dt \right| \\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \\ &\leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt \end{aligned}$$

d'après 2)b)i)

Or

$$\begin{aligned} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3 dt &= \frac{M}{6} \left[\frac{1}{4} \left(t - \frac{k}{n}\right)^4 \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ &= \frac{M}{24n^4} \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

c) On a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{24n^4} \quad \text{d'après b).} \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{24n^4} = n \times \frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3},$$

donc

$$\left| \int_0^1 f(t) dt - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

d) Le résultat de la question précédente nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\varepsilon_n| = n^2 \left| S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq n^2 \frac{M}{24n^3} = \frac{M}{24n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} M/(24n) = 0$, par encadrement, il vient

$$\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers } 0.}$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$

et donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

e) Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' (ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$), on obtient

$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') - \frac{1}{6n^2} S_n(f''') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la suite $(S_n(f'''))$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé à la question 0, donc

$$\frac{1}{6n^2} S_n(f''') = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne

$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann (celui que l'on a utilisé à la question 0) dit que

$$S_n(f'') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f''(t) dt,$$

ce que l'on peut écrire

$$S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + o(1).$$

f) En combinant les trois derniers résultats encadrés, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \left(\int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \left(\int_0^1 f''(t) dt + o(1) \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3) a) Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \quad \text{où} \quad \forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{1}{1+x}.$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h , on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 h(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 h'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 h''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2n} [h(t)]_0^1 + \frac{1}{12n^2} [h'(t)]_0^1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= [\ln |1+t|]_0^1 - \frac{1}{2n} \left[\frac{1}{1+t} \right]_0^1 + \frac{1}{12n^2} \left[-\frac{1}{(1+t)^2} \right]_0^1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$u_n - \ln 2 \sim \frac{1}{4n}.$$

c) Pour tout $n \geq 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned}v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n = \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}.}$$

FIN DE L'ÉPREUVE