

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites
--

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et f l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) \, dt$$

1) Donner le tableau de variations de φ , en précisant les limites aux bornes.

2) Variations de f .

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ et déterminer f' .

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = 2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$.

d) Déterminer les variations de f .

3) Étude de f aux bornes.

a) En utilisant un encadrement de φ sur $[x, 2x]$, montrer que

$$\forall x > 0, \quad x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

b) Dédire du résultat précédent les limites de f en 0 et en $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

4) À l'aide d'un développement asymptotique (généralisation des développements limités) de φ en $+\infty$, montrer que,

$$f(x) = x + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln 2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{3\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. Est-ce que f admet une asymptote en $+\infty$?

Exercice 2

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$$

- 1) Déterminer des réels a et b tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

- 2) Grâce à une intégration par parties, exprimer f sans intégrale et à l'aide de fonctions usuelles.
3) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Partie 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$.

- 1) Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire la convergence de (u_n) .
2) Établir l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$$

- 3) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

- 4) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

- b) En déduire la convergence et la valeur de la limite de $v_n = \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$.

- c) Déterminer $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Exercice 3

Pour toute fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$? (*Aucune démonstration n'est attendue.*)

1) Application

Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$

et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

- a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}$.
c) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2} \ln 2$.

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0; 1]$, à valeurs réelles.

- a) Justifier l'existence d'un nombre réel M tel que $\forall x \in [0; 1], |f^{(3)}(x)| \leq M$.
b) Soient $n \in \mathbb{N}^*, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$.

- i) À l'aide de la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur l'intervalle $[k/n; t]$, démontrer que

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6} \left(t - \frac{k}{n}\right)^3.$$

- ii) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \left(t - \frac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\frac{k}{n}$?

- iii) Par intégration entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$, démontrer que

$$\left| \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités obtenues à la question 2) b) iii, démontrer que

$$\left| \left(\int_0^1 f(t) dt \right) - S_n(f) - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

- d) Définissons la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varepsilon_n = n^2 \left(S_n(f) + \frac{1}{2n} S_n(f') + \frac{1}{6n^2} S_n(f'') - \int_0^1 f(t) dt \right).$$

Démontrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f') - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

- e) Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f') = \int_0^1 f'(t) dt - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t) dt + \varepsilon''_n.$$

- f) En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons ainsi de démontrer que

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{2n} \int_0^1 f'(t) dt + \frac{1}{12n^2} \int_0^1 f''(t) dt + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3) Application

Les suites (u_n) et (v_n) ont été définies à la question 1.

- a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- c) Démontrer que $v_n - \frac{1}{2} \ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}$

FIN DE L'ÉPREUVE