# Épreuve de Mathématiques 2

Correction

4

---

## Exercice 1 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

### A. Étude de la fonction $f$

**1)** Étude de $f$ en 0.

**a)** $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

.

**b)**
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = o(1)$.
  Donc $f$ est continue en 0.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x + o(x)$.
  Donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$.

**c)** La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc $f'$ est continue en 0, et $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**d)** Équation de la tangente $T$ à $(C)$ au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\dfrac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout $x$ dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

**2)** Variations de $f$.

**a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc $g'$ est du signe de $x$ et il vient

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| signe de $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

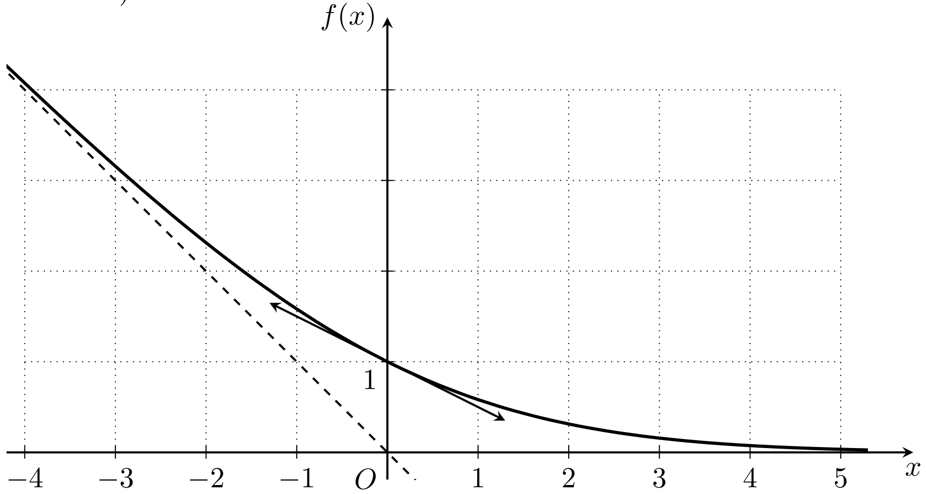
**b)** D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Donc $f'$ est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et $f$ strictement décroissante.

**c)** Au voisinage de $+\infty$ : $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc $(C)$ admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.
Au voisinage de $-\infty$ : $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus $(C)$ admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

**d)**




**B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction $f$.**

**1)** Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.
$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \iff e^\alpha = 2 \iff \alpha = \ln(2)$$

La fonction $f$ admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

**2)** **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction $\varphi$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et $\varphi$ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\forall x \in [0, +\infty[ \qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par $e^x$, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

**b)** Soit $x \in ]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2} \geqslant 0$$

**c)** $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[ \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

**d)** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f$ est continue et dérivable entre $u_n$ et $\alpha$, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où $I$ est l'intervalle de bornes $u_n$ et $\alpha$. Puisque $\sup_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

**3)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1 - \alpha|$$

  Et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$

**4)** $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et la suite $(u_n)$ converge vers $\alpha = \ln 2$.

# Exercice 2 (D'après CCP TSI 2015)

## Partie 1 (Préliminaires)

**1)** Cours. Si $q = 1$, la somme vaut $n + 1$, sinon $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

*Idée : « Une barre de fraction : Est-ce que le dénominateur peut s'annuler ? »*

**2)** L'ensemble de définition de arctangente est $\mathscr{D}_{\text{Arctan}} = \mathbb{R}$, elle est partout dérivable, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\text{Arctan}'(x)$ | $+$ |
| Arctan | $-\frac{\pi}{2} \nearrow \frac{\pi}{2}$ |

## Partie 2 (Étude de la série)

**1)** $|u_n| = \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leqslant 1$, série harmonique). Ainsi, par équivalence,

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ n'est pas absolument convergente}}$$

**2)** $u_n = (-1)^n a_n$, avec $(a_n)$ une suite positive, décroissante (car $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est sur $\mathbb{R}_+^*$) de limite nulle. Donc le critère des séries alternées s'applique :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge}}$$

Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ le reste d'ordre $n$, le critère des séries alternées nous dit aussi que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad |R_n| \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{2n+3}}$$

**3)** $I_{2k} = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$.

**4)** D'après la question précédente, $u_k = (-1)^k I_{2k}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t && \text{(linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Or, comme $-t^2 \neq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$, et

$$\boxed{U_n = \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$$

**5)** *Toujours la même idée : négliger ce qui gêne (pour le calcul : la fraction – les fractions, c'est pénible de toute façon), et garder ce qui sert (pour la majoration voulue : ici du n)*

Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, puis par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2n+3}}$$

**6)** D'après 4),

$$U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, d'où

$$U_n - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or d'après 5), $\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, par majoration,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{4}}$$

## Partie 3 (Un procédé élémentaire d'approximation de $\pi$)

**1)** D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|U_n - \frac{\pi}{4}\right| = \left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}$$

D'où, $\boxed{|4U_n - \pi| \leqslant \frac{4}{2n+3}}$

**2)** $4U_n$ approche $\pi$ à $10^{-3}$ près lorsque $\dfrac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-3}$, c'est-à-dire $\dfrac{4000-3}{2} \leqslant n$. Donc $n = 1999$ convient :

$$\boxed{\pi = \sum_{n=0}^{1999} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

*On remarquera que la série alternée converge lentement : pour avoir 3 chiffres significatifs, il faut près de 2000 termes...*

### Partie 4 (Un autre procédé d'approximation de $\pi$)

**1)** $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\, t]_0^{t_0} = \mathrm{Arctan}\,(t_0)$. Or $\tan(\pi/6) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

*Il n'est pas interdit de faire un cercle trigonométrique. J'insiste. Vous ne le saviez peut-être pas lors du premier DS, mais désormais vous le savez. Donc vous avez tous su faire cette question, évidemment.*

$$\boxed{\int_0^{t_0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6}}$$

**2)** Sur le modèle de la partie précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, t_0]$, $-t^2 \neq 1$ donc

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

Puis en intégrant entre 0 et $t_0$,

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t_0^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Sur le modèle de la majoration du 6),

$$0 \leqslant \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{t_0} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+3)t_0^{2n+3}} = \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}\sqrt{3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, par majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{t_0} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, la série de terme général $(-1)^n \dfrac{t_0^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)3^n\sqrt{3}}$ converge, et a pour somme $\dfrac{\pi}{6}$. En multipliant par 6 il vient

$$\boxed{\pi = 4\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}}$$

**3)** D'après la question précédente, le reste est majoré par

$$\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}}$$

*En admettant le résultat de la question précédente, comme la série vérifie le critère des séries alternées, on peut retrouver immédiatement cette majoration*

**4)** 6 termes suffisent : $\dfrac{4\sqrt{3}}{13 \times 9 \times 81} < \dfrac{4 \times 2}{12 \times 9 \times 81} < 10^{-3}$.
La convergence de cette série est géométrique.

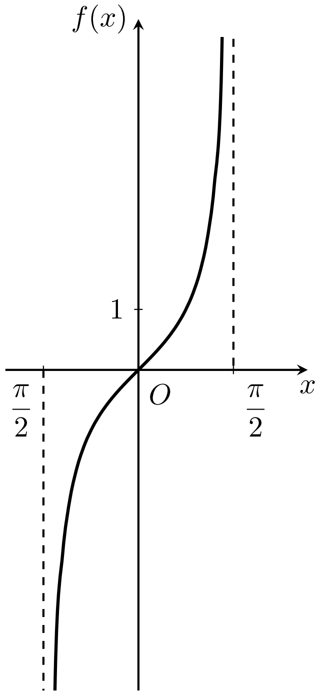
## Exercice 3 (E3A PC 2015)

## Partie 1

**1)** $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction tan est } \pi\text{-périodique}}$

**2)** La fonction tan est strictement croissante ($\tan' = 1 + \tan^2 \geqslant 1 > 0$) et impaire. De plus $\lim\limits_{\pi/2} \tan = +\infty$ d'où une asymptote verticale en $x = \pi/2$.




**3)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{il existe un polynôme } T_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie, avec $T_0 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

En dérivant, il vient

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = (1 + \tan^2(x))T_n'(\tan(x))$$

Donc, en posant $T_{n+1}(X) = (1 + X^2)T_n'(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan(x))$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$ : $\forall n \geqslant 0 \qquad \mathcal{H}_n$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite de polynômes } (T_n) \text{ voulue existe}}$

De plus, par construction de $T_{n+1}$, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1}(X) = (1 + X^2)T_n'(X)}$

**4)**

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} T_1 &=& (1+X^2)T_0' &=& 1 + X^2 \\ T_2 &=& (1+X^2)T_1' &=& 2X + 2X^3 \\ T_3 &=& (1+X^2)T_2' &=& 2 + 8X^2 + 6X^4 \end{array}}$$

**5)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n+1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ : $T_0 = X$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$ : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k, \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad a_k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_{n+1} \neq 0$$

D'après 3), $T_{n+1}(X) = (1+X^2)T_n'(X)$ donc

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= (1+X^2)\sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k+1} \\ &= a_1 + 2a_2 X + \left(\sum_{k=2}^{n} ((k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1})X^k\right) + n a_n X^{n+1} + (n+1)a_{n+1}X^{n+2} \end{aligned}$$

*Toujours vérifier ses calculs, par exemple avec $T_1$, $T_2$ et $T_3$ ci-dessus.*

Les coefficients de $T_{n+1}$ étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des $a_k \in \mathbb{N}$, ce sont aussi des entiers naturels.

De plus, comme $a_{n+1} \neq 0$, $(n+1)a_{n+1} \neq 0$ donc $\deg T_{n+1} = n+2$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n+1}$$

**6)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, où $I$ est un intervalle contenant 0. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit, en 0 :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k - \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t$$

On l'applique à la fonction tangente, de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^{2n+2}$, au rang $2n+1$, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Or tangente est impaire, donc il ne reste que les termes impairs dans la formule de Taylor : *(changement d'indice dans la somme)*

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1} - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

De plus, par construction de $T_k$, on trouve :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_{2k+1}(\tan(0))}{(2k+1)!}x^{2k+1} - \int_0^x \frac{T_{2n+2}(\tan(t))}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Donc en posant $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ t_k = T_{2k+1}(0)}$ $(\tan(0) = 0)$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}T_{2n+2}(\tan(t)) \,\mathrm{d}t}$$

**Partie 2**

**1)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f$ est $\mathscr{C}^\infty$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\left[f^{(n)}(t)\frac{-(x-t)^n}{n}\right]_0^x - \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{-(x-t)^n}{n}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)}$

**2)** Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

**a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f^{(n)} \geq 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geqslant 0$ sur $[0, b]$), la suite $(R_n(b))$ est positive.
De plus, d'après 1), $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \dfrac{b^n}{n!}f^{(n)}(0) \leqslant R_n(b)$.
Ainsi, la suite est décroissante et minorée par 0. Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } (R_n(b)) \text{ est convergente}}$

**b)** Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

**i)** En effectuant le changement de variable défini par $t = ux$ on obtient :

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-ux)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(ux)x\,\mathrm{d}u = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(tx)\,\mathrm{d}t$$

**ii)** D'après les calculs du 2)a), comme $x \geqslant 0$, $R_n(x) \geqslant 0$.
De plus, $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $I \cap \mathbb{R}_+$, donc $f^{(n)}$ croissante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant tx \leqslant tb$ entraîne $f^{(n)}(tx) \leqslant f^{(n)}(tb)$. Ainsi

$$R_n(x) = |R_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 |f^{(n)}(tx)||1-t|^{n-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t}$

**iii)** D'après 2)b)i) avec $x = b$, on a $R_n(b) = \dfrac{b^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1}f^{(n)}(tb)\,\mathrm{d}t$. D'où 2)b)ii) s'écrit $(b \neq 0)$ :

$$\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)}$$

**c)** Soit $x \in [0, b[$. **Toujours** *citer les questions utilisées, précisément.*
D'après 2)a) la suite $(R_n(b))$ est convergente. De plus, par construction, $0 \leqslant \dfrac{x}{b} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^n = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b) = 0$.
Donc, par encadrement, 2)b)iii) entraîne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n$ pour la fonction $f$ sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$) s'écrit.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$$

Donc, en passant à la limite pour $n \to +\infty$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Puisque $f$ est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux $x$ dans $]-b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in ]-b, b[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$

**3)** La fonction tan vérifie les conditions demandées pour $f$ : elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ puisque $T_n$ est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geqslant 0$.

Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du 2)c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ comme au I)6), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

**FIN DE L'ÉPREUVE**